УДК 372.851

Эффективные способы и методы преподавания темы «Комплексные числа»

Кухарский Даниил Александрович
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
Студент

Аннотация
В данной статье представлен опыт преподавания комплексных чисел в классах с углубленным изучением математики. Рекомендуется рассматривать данную тему в начале десятого класса, так как полученный опыт будет являться пропедевтикой к другим разделам курса математики в старших классах. Комплексные числа существенно облегчают решение более сложных задач профильной математики, повышают интерес учащихся к изучаемой дисциплине, направляют мышление учащихся на поиск решения, дают твердое понимание того, что математические формулы не живут обособленной жизнью, их применяют в разных областях науки и техники, они востребованы для объяснений иногда даже таких сложных понятий, как время и пространство. Целью научно-исследовательской работы является найти действенные способы и методы преподавания темы «комплексные числа», которые позволят учащимся достичь более глубокого понимания его основ. Для решения поставленной задачи комплексно использованы: теоретические методы: анализ и обобщение научно-теоретической педагогической литературы, эмпирические методы: целенаправленное наблюдение за учебно-воспитательным процессом. В результате проведенного исследования было выявлено, что для более глубокого усвоения материала необходимо использовать аналогии в обучении, создавать задания и упражнения, способствующие визуализации абстрактных концепций. Такой подход не только улучшает усвоение учебного материала, но и повышает успеваемость учащихся.
Ключевые слова: комплексные числа, методика преподавания курса алгебры в старших классах, применение комплексных чисел, Леонард Эйлер, компьютерная алгебра, тригонометрия, векторы, критическое мышление, мнимое время, физика и комплексные числа, операции над числами, уравнение, множество действительных чисел, функция.

Effective ways and methods of teaching the topic "Complex numbers"

Kukharsky Daniil Aleksandrovich
Sholom-Aleichem Priamurskiy State University
Student

Abstract
This article presents the experience of teaching complex numbers in classes with in-depth study of mathematics. It is recommended to consider this topic at the beginning of the tenth grade, since the experience gained will serve as a propaedeutic to other sections of the mathematics course in high school. Complex numbers significantly facilitate the solution of more complex problems in specialized mathematics, increase students' interest in the discipline being studied, direct students' thinking to find solutions, and give a firm understanding that mathematical formulas do not live a separate life, they are used in various fields of science and technology, they are in demand for explanations sometimes even of such complex concepts as time and space. The purpose of the research work is to find effective ways and methods of teaching the topic "complex numbers" that will allow students to achieve a deeper understanding of its fundamentals. To solve the problem, the following were comprehensively used: theoretical methods: analysis and generalization of scientific and theoretical pedagogical literature, empirical methods: targeted observation of the educational process. As a result of the study, it was revealed that for a deeper assimilation of the material it is necessary to use analogies in teaching, create tasks and exercises that facilitate the visualization of abstract concepts. This approach not only improves learning, but also improves student performance.
Keywords: complex numbers, methods of teaching a high school algebra course, application of complex numbers, Leonard Euler, computer algebra, trigonometry, vectors, critical thinking, imaginary time, physics and complex numbers, operations on numbers, equation, set of real numbers, function.

1 Введение

1.1 Актуальность

Как известно, широкий спектр современных специальностей требует хорошей математической подготовленности. Поэтому Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования выделяет основную задачу в обучении – дать прочное и осмысленное овладение комплекса математических умений и знаний, которые станут прочным фундаментом для построения профессионального фундамента учащихся. Видим, как растет влияние математики в сложных задачах управления и автоматизации, поэтому приходим к необходимости улучшения содержания и методов преподавания математики.

Данная работа посвящена разнообразным методам обучения темы «Комплексные числа», исследованию новых подходов и интерпретаций, которые способствовали бы достижению более высоких результатов в изучаемой области. С помощью данного раздела можно улучшить понимание других приложений алгебры и геометрии, так как комплексные числа могут служить важным введением к таким темам, как «Векторы» и «Тригонометрия». Проблема еще состоит в том, что данная тема не входит в основную часть базового и профильного уровня ЕГЭ по математике, следовательно, часто пропускается из-за нехватки часов для более качественной подготовки к экзамену. В университете же на первом курсе по электротехнике и электронике появляются задачи именно с применением комплексных чисел [9]. Студентам приходится самостоятельно осваивать данный раздел, часто не углубляясь в основные понятия, так как имеется огромное количество компьютерных программ, которые позволяют производить операции с комплексными числами. Учащийся получает ответ, но не задумывается над природой комплексных чисел. А ведь комплексные числа применяются при решении дифференциальных уравнений, при анализе случайных процессов и моделировании вероятностей, используются при анализе переменных токов и напряжений в электрических цепях, в моделировании колебаний и волн. Комплексные числа используются при разработке алгоритмов компьютерной графики, обработке сигналов в радиосвязи и цифровых технологиях. Таким образом, понимание и применение комплексных чисел оказывает существенное влияние на различные области науки, техники и технологий, делая эту тему важной и актуальной для изучения.

1.2 Обзор исследований

За последние пять лет в электронной библиотеке elibrary насчитывается более 30 тысяч публикаций на тему «Комплексные числа». В одной из публикаций И. В. Прояева и А. Н. Колобов приходят к выводу, что использование комплексных чисел для подтверждения классических теорем элементарной геометрии оказывает эффективное воздействие на усвоение знаний. Учащиеся начинают применять комплексные числа не на интуитивном уровне, как это было в начале их знакомства с данной темой [11]. Такой подход представляет собой ключевой момент в процессе обучения, поскольку ограничение применения комплексных чисел лишь интуитивным пониманием не позволяет углубить знания. Важно, чтобы учащиеся видели в этих числах не просто абстрактные величины, а инструмент для решения разнообразных задач в геометрии и физике.

Использование анимационных рисунков при изучении комплексных чисел тоже играет значительную роль, поскольку они наглядно демонстрируют операции с числами. Привлечение учащихся к созданию таких продуктов способствует формированию компьютерной грамотности. Через анимацию можно увидеть простое доказательство основной теоремы алгебры, подтверждающей существование корня многочлена [12]. Такой метод помогает учащимся лучше представить и понять операции с комплексными числами.

В одной из работ Е. Р. Садыкова и О. В. Разумова используют комплексный аппарат к решению прикладных задач геометрии, что позволяет очень быстро производить расчет по готовым формулам прямым вычислением. Такой подход является более простым, по сравнению с другими методами, требующими порой немалой сообразительности и длительных поисков [13].

Для учащихся важно продемонстрировать, как использование комплексных чисел упрощает вычисления и облегчает поиск решений для различных задач. Когда учащиеся осознают, что изучение нового материала способствует упрощению задач, которые решались на предыдущих этапах обучения, это может стимулировать их мотивацию, помочь им понять логику построения математического образования и установить логические связи между различными разделами алгебры и геометрии. С этой же целью автор статьи приводит примеры использования комплексных чисел для упрощения экономических расчетов, для вычислений электрических цепей переменного тока, в машинном обучении и программировании [19].

В ряде диссертационных работ рассмотрены методические особенности преподавания темы «Комплексные числа». В диссертации О. С. Тамер [24] разработаны методические условия, которые повысили эффективность обучения через межпредметные связи. Это способно обогатить учебный процесс, вдохновить учащихся и пробудить их любопытство к определенной теме. В одной из работ разработан факультативный курс по данной теме, рассмотрены условия и цели постановки факультативных курсов в современной школе [4]. Особое внимание уделяются задачам с геометрическим приложением, разработана методика преподавания таких задач, обоснована целесообразность геометрической интерпретации комплексных чисел для школьников [3]. Анализ теоретического и задачного материала позволяет точно понять особенности обучения школьников, выделить ключевые моменты для определения вектора развития с учетом поставленных целей и желаемых результатов. Автор определил основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме [5], в одной из работ использовался смешанный подход для изучения и улучшения понимания комплексных чисел учащимися среднего класса, они разработали дидактическую последовательность, позволяющую учащимся десятого класса развить комплексное и геометрическое представление о комплексных числах, включая операции, преобразования и практическое применение при решении задач и реальных ситуаций. В исследовании используются важные инструменты: геоборд, облегчающий приобретение практических знаний, а также различные программные приложения, такие как GeoGebra, Excel и видеоигра «Энигма», чтобы способствовать вовлечению учащихся и укреплению обучения [6, 7].

На основании проведенного обзора научных публикаций и анализов вышеописанных выводов авторов и педагогического опыта можно говорить о целесообразности применения различных методов проведения уроков, включающие новые аналогии с комплексными числами и методы визуализации с помощью компьютерных программ, а также включения прикладных задач по физике, биологии и другим разделам математик для более глубокого понимания ключевой темы и возможности увидеть связь между комплексными числами и наукой в целом.

1.3 Цель исследования

Целью исследования является описание опыта использования современных методов при изучении комплексных чисел.

2 Материалы и методы

В исследовании применялся анализ педагогической литературы, процесса практической деятельности.

3 Результаты и дискуссии

Связь между яблоком и комплексными числами может показаться неочевидной, поскольку они относятся к разным областям знаний. Однако, можно предложить аналогию, которая поможет нам увидеть некоторую связь и лучше понять природу комплексных чисел. Именно к таким примерам часто приходится прибегать преподавателям, объясняя тему в школах и колледжах. Представим, на столе лежит яблоко, и необходимо измерить его массу и размеры. Для этого можно использовать вещественные числа. Например, можно измерить массу яблока в граммах и его размеры в сантиметрах. В этом случае достаточно использовать только вещественные числа. Однако, представим теперь, что необходимо измерить не только массу и размеры, но и учесть его цвет, форму и другие характеристики, которые не могут быть полностью охарактеризованы с помощью вещественных чисел. В этом случае понадобятся комплексные числа. Таким образом расширяем возможность описания и анализа явлений, которые требуют учета более сложных характеристик. Важно отметить, что это всего лишь аналогия, и в реальности комплексные числа применяются в математике и науке для решения более сложных задач, не связанных непосредственно с яблоками. Подобные аналогии могут быть интегрированы в учебный процесс с использованием компьютерных программ и анимации. Для формирования коллекции таких аналогий можно воспользоваться специальным разработанным приложением для смартфонов, которое станет надежным помощником для учащихся. С педагогической точки зрения оно будет способствовать расширению их зоны ближайшего развития.

Мнимая единица, безусловно, является необычным и иногда даже путающим понятием для учащихся. Однако, она не скрывает от нас никаких дополнительных тайн или неизвестных свойств [8]. Споры о том, что перед величиной с мнимой единицей что-то не так, могут возникнуть из-за того, что использование мнимых чисел может привести к некоторым неожиданным результатом. Например, возведение в квадрат мнимого числа дает отрицательное число, что может быть противоречиво интуитивному пониманию чисел. Это не означает, что мнимые числа некорректны или неудовлетворительны. На самом деле, мнимая единица вводится в математике для расширения числовой системы и решения более сложных задач [10]. Она имеет свои строгие математические определения и правила, которые позволяют нам работать с ней и получать точные результаты.

На первом этапе знакомства учащихся с комплексными числами стоит научить умножать число или вектор на мнимую единицу. Для лучшей визуализации можно представить дерево, которое растет в пространстве, каждая ветвь этого необычного дерева вращается вокруг своей оси по мере роста [12]. Каждый раз, когда ветвь поворачивается на 90 градусов, возможно представить этот поворот с помощью мнимой единицы [16]. Здесь формируется такое важное понимание мнимой единицы: мнимая единица не является выдуманной, ее существование вполне реальное. Многие школьники после подобной визуализации способны увидеть и практическую пользу использования мнимой единицы. Школьники могут испытывать затруднения в усвоении темы «Векторы» по ряду причин: ограниченное пространственное мышление, недостаточное количество практических задач и примеров, адаптированных к уровню понимания учащихся, несоответствие методов обучения индивидуальным потребностям учеников. Такие примеры с комплексными числами могут помочь представление векторов в трехмерном пространстве. Новая информация лучше запоминается, если она связывается с уже имеющейся в памяти информацией, для этого очень важно найти подходящую аналогию или образ.

Можно рассмотреть еще один пример из реальной жизни. Представим, что находимся в темной комнате и видим светящуюся точку на стене. Наблюдатель может управлять этой точкой, используя комплексные числа. Чтобы переместить точку в другое место на стене, можем использовать комплексное число, где вещественная часть представляет сдвиг по горизонтальной оси, а мнимая часть – сдвиг по вертикальной оси. Для перемещения точки на 3 единицы вправо и 2 единицы вверх, используем комплексное число $z=3+2i$. Также, используя комплексное число как оператор масштабирования, возможно изменять размер святящейся точки. Если умножить комплексное число на вещественное, то это приведет к изменению размера точки. Например, при умножении комплексного числа $z=1+i$ на 2, то точка увеличится в 2 раза. Использование инновационных компьютерных программ для этих целей позволят сделать объяснение школьникам не только интересным, но и вдохновляющим, особенно для тех, кто интересуется физикой, компьютерной графикой или робототехникой. Можно интерпретировать комплексное число и как оператор поворота на плоскости. Или вместе с учащимся создать анимацию движения объекта на экране компьютера. При последовательном умножении комплексного числа на i, возможно создавать анимацию плавного вращения объекта вокруг заданной точки или оси. Если умножить на i^2, объект повернется на 180 градусов. Для математического моделирования и геометрической визуализации можно использовать GeoGebra, Wolfram Mathematica, Python с библиотекой matplotlib.

Уже в древности было известно, что уравнение $x^2=a$, имеет решение, когда a – положительное число. В 16 веке итальянский математик Джироламо Кардано ввел понятие «фиктивных» корней для решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом [1]. Однако, истинное введение мнимой единицы произошло в 18 веке. Французский математик Абрахам де Муавр в своей работе «Анализ бесконечно малых» предложил использовать выражение i для обозначения квадратного корня из -1. Это открытие позволило формализовать комплексное число и развить комплексный анализ. Следующим важным периодом становится открытие формулы Эйлера. Леонард Эйлер показал, что комплексное число может быть представлено в другой его форме. Формула установила связь между тригонометрией и комплексными числами.

Великий естествоиспытатель, математик и историк Г.В. Лейбниц подчеркивал, что история науки учит искусству открытий, то есть способствует развитию мышления. Нельзя считать, что основная цель преподавания вообще, и математики в частности, состоит в том, чтобы сообщить ученику как можно больше конкретных знаний, новых понятий и теорем. «Многознание уму не научает», - говорил Гераклит. Поэтому на уроках очень важно делать акцент об историческом аспекте изучаемой темы. Использование интерактивных методов, таких как игры, презентации, видеоматериалы и дискуссии создает интерес и вовлеченность учащихся в исторический контекст. Это позволит учащимся получить определенные переживания, способные открыть эти числа для себя с другого ракурса. Каждый их по-разному откроет для себя, но это обязательно должно произойти, а роль учителя и состоит в том, чтобы ученику помочь в этом процессе. Такой сознательный рефлексивный контроль и намерение овладение знаниями являются важнейшими факторами обучения в школе. У каждого из наших учеников присутствует увлечение, которое является для них особенно интересной сферой. Одни увлекаются химией, другие программированием, физикой или юриспруденцией. И важно, чтобы каждый из них, изучая выбранную тему, увидел в ней отклик на свои личные интересы. Это создает особый мостик между изучаемой темой и их индивидуальными увлечениями. Поэтому целесообразно будет показать применение комплексных чисел в разных сферах нашей жизни, иногда даже чуть опережая время, проговорить о возможных перспективах в той или иной исследуемой области.

Комплексные числа играют важную роль в анализе и представлении сигналов [21]. Они позволяют нам описывать и понимать различные аспекты сигналов, такие как амплитуда, частота и фаза. Учащимся важно продемонстрировать это на примере синусоидального сигнала, такого как звуковая волна. Этот сигнал можно представить в виде комплексного числа, где действительная часть представляет амплитуду сигнала, а мнимая часть представляет фазу, то есть текущее положение или состояние колебательной системы во времени. В дальнейшем, такое компактное представление имеет большое значение в области сигнальной обработки и телекоммуникаций. Для этих целей можно использовать программный код на языке Scratch – моделирование физических явлений, что позволит наглядно представить физические законы и роль комплексных чисел в них. Такая среда программирования помогает детям более точно визуализировать свои абстрактные идеи. Ученый Т.Т. Сидельникова определила визуализацию как «педагогический метод, основанный на принципе ясности, в рамках которого символическое представление содержания, функции, структуры осуществляется через ассоциативно-иллюстративную серию».

Для увлеченных биологией и химией будет интересно узнать о возможном применении комплексных чисел в генетическом процессе скрещивания двух разных видов или штаммов для создания потомства с желательными генетическими свойствами [22]. Когда происходит скрещивание двух организмов с разными генотипами, происходит комбинация генов. Каждый ген имеет две аллели, которые могут быть представлены комплексными числами. Например, имеется ген, у которого две аллели – A и a. Теперь можем представить генотипы организмов, скрещивающихся, как комплексные числа, где вещественная часть представляет генотип первого родителя, а мнимая часть – генотип второго родителя. Таким образом, результатом скрещивания будет комбинация генотипов, которая может быть представлена суммой или произведением комплексных чисел. Можем заметить, что такие методы помогают упростить и моделировать сложные генетические процессы, позволяя исследователям получать более глубокое понимание генетической структуры и эволюции организмов. Поэтому межпредметные связи на уроках математики обеспечивают всестороннее развитие школьников, углубляют понимание изучаемой темы и открывают новые перспективы для выбора профессии. Кроме того, они придают большую значимость учебной теме, так как ученики осознают, что математика имеет непосредственные связи с реальной жизнью и окружающей действительностью.

Для более глубоко погружения в изучаемую тему, важно давать ученикам возможность развивать свою фантазию и строить образы о применении полученных знаний в будущем. Этот подход способствует развитию и формированию учащихся, позволяя им почувствовать себя исследователями в рамках данной темы. Так, можно рассмотреть компьютер будущего. В настоящее время компьютеры основаны на двоичной системе счисления, где информация представляется в виде битов (0 и 1). Однако, есть концепция компьютеров, которые могут работать на основе комплексных чисел. Такие вычислительные машины могут быть и квантовыми [17]. Комплексные числа могут представлять больше информации, чем двоичные числа. Они могут использоваться для эффективного представления и обработки определенных типов данных, таких как сигналы, изображения или квантовые состояния. Каждый кубит может быть представлен с помощью двух комплексных чисел, называемых амплитудами. Первое комплексное число представляет вероятность нахождения кубита в состоянии 0, второе – вероятность нахождения кубита в состоянии 1. Конечно, многие учителя возразят, что такие приемы способны отвлечь от основной задачи образования, но воображение является движущей силой познания. Фантазия идеально сочетает «три главных многоцелевых когнитивных инструмента: язык, грамотность, теоретическое мышление».

Подумать о возможностях будущих компьютеров вдохновляет, однако не стоит забывать о реальном потенциале современных компьютерных программ. В последнее время создано большое количество математических пакетов, таких как MatLab, Mathcad, Maple. Они образуют новую отрасль в математике – компьютерную алгебру. Использование таких математических программ позволяет освободить учащихся от рутинной работы, повышает компьютерную грамотность, стимулирует познавательную деятельность, учащиеся лишаются страха при работе с большим объемом информации, вырабатываются устойчивые навыки, направленные на практическую реализацию математической идеи [14]. Поэтому целесообразно периодически выделять такой класс задач, которые решить будет более удобно в одном из перечисленных пакетов. Стоит отметить, что в программе Mathcad используется естественный математический язык, что облегчает ее использование на уроке и дома. И здесь важно отметить, что лучше начинать с таких задач, модели которых учащимся более чем знакомы. Это может быть работа на движение, выполненную работу, на проценты, смеси и сплавы.

Математические пакеты могут облегчить процесс вычислений, повышают компьютерную грамотность, однако имеются и такие программы, которые помогут проникнуть в сложные математические концепции, почувствовать себя исследователем, и возможно, даже «первооткрывателем». В области комплексных чисел было сделано множество новых и современных открытий. К примеру, комплексные числа используются для изучения фракталов и хаотических систем [2]. Фракталы – это сложные геометрические фигуры, которые обладают самоподобием на разных масштабах. Могут использоваться для исследования хаотического поведения в динамических системах. Изучая математику, нельзя не затронуть эту красоту природы. Ведь природа написана на языке формул и уравнений. В своей практике следует рассказывать о фракталах Мандельброта, ведь именно комплексные числа вдохнули жизнь фрактальной геометрии. И в качестве одной из домашних работ можно организовать работу с программой Qfractalnow, где необходимо самому выбрать определенную последовательность комплексных чисел и получить свой индивидуальный созданный фрактал. Нельзя сказать, что это очень повысит интерес к математике, скорей всего создаст много вопросов, это будоражит воображение учащихся. Ведь они столкнулись с вечностью и неопределенностью, а именно это всегда нас пугает, но способно перевести наше мышление на более высокий уровень, более сложный, аналогично тому, как преобразовали одномерные числа в двухмерные на наших первых уроках.

Философия фрактальной геометрии рационализирует и конкретизирует восточный принцип «одно во всем и все в одном», указывая на область его применимости и одновременно методологически открывая простоту сложного. Но не только фракталы Мандельброта демонстрируют мощь математики, но и существует еще одно важное и фундаментальное уравнение, знакомство с которым является обязательным для школьников, изучающих комплексные числа. При изучении тригонометрического и показательного вида комплексного числа, приходишь к рассмотрению знаменитого уравнения

Эйлера [1]. Это уравнение объединяет пять самых важных фундаментальных чисел в математике. Оно показывает, что даже на первый взгляд непохожие числа могут быть взаимосвязаны. Это уравнение Эйлера называют «формулой Бога» из-за своей простоты и красоты. Многие математики считают, что оно отражает глубину и гармонию вселенной, а его простота и элегантность вызывают ощущение вневременности и даже духовности. Визуализация этого уравнения может быть сложной, так как оно связывает комплексные числа, которые находятся в двумерном пространстве, с числами π и е, которые являются числами вещественными и находятся на числовой прямой. Однако, есть несколько способов визуализации этого уравнения. Например, можно использовать комплексную плоскость, где $e^{-i\pi}$ будет представлено точкой на окружности с радиусом 1 и центром в начале координат, а 1 будет представлено точкой (1;0). Тогда уравнение будет утверждать, что сумма этих двух точек равна нулю. В физике уравнение используется в теории электрических цепей и волновой оптике. Кроме того, уравнение Эйлера также связано с преобразованием Фурье, которое позволяет разложить сложные сигналы на составляющие частоты [20]. В оптике, уравнение Эйлера используется для описания распространения света и интерференции. Уравнение также находит применение в других областях, таких как математический анализ и теория вероятностей. Оно помогает в решении дифференциальных уравнений, в моделировании случайных процессов и в разработке алгоритмов компьютерной графики. Это уравнение представляет математический инструментарий для анализа и решения сложных задач в науке и технике. Поэтому важно, чтобы школьники, изучая показательный вид записи комплексных чисел, основательно познакомились с числом е. Ввести понятие трансцендентных чисел, познакомить со вторым замечательном пределом, рассмотреть экспоненциальный росте определенных величин. Безусловно, каждый аспект данного вопроса будет изучаться очень подробно и систематически, но такой подход позволит увидеть востребованность трансцендентного числа е в математических операциях.

Для более глубокого изучения предмета часто приходится обращаться к элементам высшей математики, поскольку элементарная математика тесно взаимосвязана с основами высшей математики. Такой подход не только вносит дополнительную ясность изучаемой темы, но и создает прочный фундамент для дальнейшего обучения в колледжах и университетах. Так как в дополнительных главах общеобразовательной программы 7 класса учащих знакомят с матрицей и определителем, поэтому на этапе изучения темы: «Комплексные числа» стоит сравнить между собой матрицы и комплексные числа [15]. Такое сходство поможет опять же лучше понять и визуализировать математические операции. Кроме того, любой квадратной матрице «два на два» тоже соответствует определенное преобразование плоскости. Матрицы и комплексные числа имеют некоторые сходства:

1. Алгебраическая структура. Оба типа объектов подчиняются законам сложения и умножения, обладают свойствами ассоциативности и

дистрибутивности, имеют нейтральные и обратные элементы относительно операции сложения.

2. Геометрическая интерпретация. Как комплексные числа, некоторые матрицы могут иметь геометрическую интерпретацию. Например, матрицы-повороты и матрицы-масштабирования.

3. Компоненты. Как комплексные числа, матрицы состоят из компонентов. В комплексных числах это действительная часть и мнимая, а в матрицах это элементы, расположенные в строки и столбцы.

4. Арифметические операции. Как комплексные числа, матрицы могут складываться и умножаться. Операция сложения выполняется покомпонентно, а операция умножения включает в себя комбинацию компонентов матриц и действий над ними.

Несмотря на то, что комплексные числа, как математический объект, были детально изучены и формализованы в современном смысле только в 16-17 веках, однако, есть некоторые исторические упоминания о применении подобных концепций в Древнем Египте. Например, в поздних египетских математических текстах были обнаружены записи, которые могут быть интерпретированы как некоторые предшественники комплексных чисел. Поэтому особое внимание следует уделять заинтересованности учащихся к данной теме, вовлекать в их активное мышление, захватывать их воображение и показывать им широкий вектор развития, чтобы помочь увидеть математику как цельное и взаимосвязанное знание. Каждая изучаемая тема становится связующим звеном, позволяющим ученикам увидеть великолепное единство математики во всей ее сложности и гармонии.

Стоит отметить так же, учебный процесс преподавания каждой темы по математике требует межпредметных связей с физикой, так как эти две науки не могут существовать изолированно друг от друга [15]. Такой подход реализует одновременно высокие достижения в этих областях, формирует критическое и логическое мышление учащихся, способствует пониманию единства законов природы. Одновременно с помощью межпредметных связей можно повысить интерес к отдельным темам, изучаемым в курсе алгебры. В книге Стивена Хокинга «Три книги о пространстве и времени» разбирается вопрос мнимого времени. Великий ученый нашего времени предполагает, что время не идет только в одном направлении, оно способно идти без проблем и в другую сторону. Для него время представляется как обычная координата. И свою идею он выражает в формулах, где используются комплексные числа. По этой причине очень полезным будет познакомить учащихся с книгами таких авторов, как Стивен Хокинг, Митио Каку, Ричард Мюллер. Такая литература способна повысить интерес к обучению в целом, направить мышление учащихся на поиск решения, дать твердое понимание того, что математические формулы не живут обособленной жизнью, их применяют в разных областях науки и техники, они востребованы для объяснений иногда даже таких сложных понятий, как время и пространство. Многие математики имеют ясное мнение, что уравнение не имеет смысла, если не выражает смысл

Бога. Именно такой подход является правильным в системе обучения: научить учащихся видеть смысл операций над числами, уравнениями и функциями.

В завершение изученной темы стоит познакомить учащихся и с такими числами, которые включают в себя три мнимые единицы, обычно обозначаемые как i, J, k. Кватернионы имеют широкое применение, их можно представить, как ориентированные вращения в трехмерном пространстве. Ученикам можно показать, как, используя, кватернионы, можно поворачивать объекты вокруг трех осей (x, y, z) [23]. Это может быть проиллюстрировано с помощью простых графических примеров или интерактивных программ.

Безусловно, для приобретения навыков работы с комплексными числами не избежать рутинной работы, поэтому еще несколько уроков целесообразно посвятить практическим заданиям на все действия с числами, очень ценны такие задания, в которых учащийся самостоятельно определяет в какой форме лучше оставить записанное комплексное число. Организованная работа в парах способна дополнительно мотивировать обучающихся к деятельности, гармонично сочетать на уроке не только обучение, но и воспитание, умение работать в группе и выстраивать правильные деловые отношения [17]. После приобретения необходимых навыков по изучаемой теме можно переходить к следующим разделам курса алгебры и начала анализа, быть уверенным в том, что для этого уже подготовлена твердая почва. Ведь учащиеся уже с легкостью будут воспринимать тригонометрию и работу с векторами. А если использовать метод опережающего обучения в теме «комплексные числа», то можно представить действительную или мнимую часть числа не только с помощью тригонометрических функций, в арсенале учителя имеются и другие функции, такие как логарифмическая, показательная, иррациональная. Тогда изучение данных разделов математики пройдет тоже с необычайной легкостью.

Исследование показало, что для более эффективного усвоения учебного материала полезно применять аналогии, разрабатывать задания и упражнения, способствующие визуализации абстрактных понятий. Такой метод не только способствует лучшему усвоению учебного материала, но также повышает успеваемость учащихся. Этот подход играет важную роль в учебном процессе, поскольку ограничение использования комплексных чисел только на уровне интуитивного понимания не позволяет достаточно углубить знания. Важно, чтобы учащиеся видели в этих числах не просто абстрактные величины, а мощный инструмент для решения разнообразных задач в геометрии и физике. Такие сравнения могут быть интегрированы в учебный процесс с применением компьютерных программ и анимации. Для создания коллекции подобных сравнений можно использовать специальное мобильное приложение, которое станет полезным инструментом для учащихся. С педагогической точки зрения это поможет расширить их потенциал для обучения.

Показывая учащимся, как применение комплексных чисел упрощает вычисления и облегчает поиск решений задач, можно стимулировать их мотивацию. Когда они осознают, что изучение нового материала упрощает задачи, которые они решали ранее, это помогает им лучше понять логику математического образования и установить связи между различными аспектами алгебры и геометрии. Применение современных компьютерных программ для этой цели позволит сделать обучение не только увлекательным, но и вдохновляющим для школьников, особенно для тех, кто увлечен физикой, компьютерной графикой или робототехникой.

Важно, чтобы каждый ученик, изучая определенную тему, находил в ней отражение своих личных интересов. Это способствует установлению особой связи между учебным материалом и их индивидуальными увлечениями. Поэтому имеет смысл демонстрировать применение комплексных чисел в различных областях жизни, иногда заранее обсуждая потенциальные перспективы в изучаемой области. Следовательно, взаимосвязи между предметами на уроках математики способствуют всестороннему развитию учащихся, углубляют понимание изучаемого материала и открывают новые горизонты для будущего профессионального выбора. Кроме того, такие связи придают большее значение учебной теме, поскольку ученики осознают, что математика тесно связана с реальным миром и окружающей их действительностью.

Для углубленного освоения материала часто требуется изучение высшей математики, поскольку элементарные математические принципы тесно связаны с более сложными концепциями этой науки.

Можем наблюдать, как ученики стали проявлять особый интерес к изучаемой теме: на уроке физики успешно находили равнодействующую силу с помощью комплексных чисел, на занятиях по экономике предложили использовать комплексные числа для расчета денежных единиц. Каждый человек имел бы свой комплексный счет, состоящий из действительной и мнимой части. Действительная часть отражает количество денег, а мнимая указывает на направление изменения счета. У учеников начало активно развиваться пространственное мышление, что привело к более глубокому пониманию сути умножения вектора на число и его вращения вдоль окружности. Эти навыки оказались весьма полезными при решении геометрических задач и стали прочной основой для изучения тригонометрии, быстрого построения угла на единичной окружности, а также для преобразования градусов в радианы. По мнению автора, самое красивое задание, решаемое в изучаемой теме, - извлечение арифметического корня из комплексного числа. Во-первых, появляются очень красивые многоугольники, вписанные в окружность. Есть возможность еще раз увидеть, что решение тригонометрических уравнений – это не нахождение одного или двух корней, а поиск именно серий решений, удовлетворяющих определенным условиям. Здесь и вводится понятие обратных тригонометрических функций, работа с которыми всегда раньше вызывала огромную сложность. Если использовать метод опережающего обучения в теме «Комплексные числа», то можно представить действительную или мнимую часть числа не только с помощью тригонометрических функций, в арсенале учителя имеются и другие функции, такие как логарифмическая, показательная, иррациональная. Тогда изучение данных разделов математики пройдет тоже с необычайной легкостью. В тех классах, где учебный процесс начинался с комплексных чисел, последующее обучение протекало более продуктивно и эффективно. Ученики демонстрировали высокие результаты на контрольных работах, активно задавали вопросы, раскрывающие суть изучаемой темы. Они легко воспринимали последующий материал, что способствовало быстрой адаптации к разнообразным задачам.

Рекомендовано завершить данную тему выездной экскурсией в музей «Некрополь Александро-Невской лавры» в городе Санкт-Петербург, где вместе с учащимися класса посетить место погребения наивеличайшего математика 18 века Леонарда Эйлера. Использование образовательного потенциала музея помогает достичь метапредметных результатов в соответствии с требованиями ФГОС среднего общего образования. Музей не только расширяет и углубляет знания, но и формирует личность.

4 Выводы

На основании анализа научных источников и опыта использования современных технологий преподавания комплексных чисел можно сделать вывод о целесообразности дальнейшей исследовательской деятельности для изучения эффективности применения описанных в статье методов.

Библиографический список

1. Авдеева А.А., Росляков И.Н., Рослякова Л.И. История возникновения комплексных чисел и их влияние на развитие математики // Молодежь и XXI век. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т., ЗАО «Университетская книга», 2016. С. 47-49.
2. Секованов В.С. Методическая система формирования креативности студентов университета в процессе обучения фрактальной геометрии. Кострома: Костром.гос.ун.-т. Из-во КГУ, 2006. 279 с.
3. Котова Ю.В. Методические особенности изучения геометрических приложений комплексных чисел в классах с углубленным изучением математики: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. М, 1996.186 с.
4. Симоновская Г.А. Факультативный курс «Комплексные числа и их приложения» для старших классов средней школы: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. М, 1997.172 с.
5. Тарасенко А.В. Формирование межпредметных связей при обучении старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики // Студенческий: научный журнал. 2019. №34. С. 79-88.
6. Ang L.H., Shahrill M. Identifying Students’ Specific Misconceptions in Learning Probability // International Journal of Probability and Statistics. 2014. 3 (2). pp. 23-29.
7. In Service Secondary Teachers’ Conceptualization of Complex Numbers // Pitzer College URL: http://pzacad.pitzer.edu/~dbachman/RUME_XVI_Linked_Schedule/rume16_su

bmission_31.pdf (дата обращения: 25.02.2024).
8. Lester F.K. Trends and issues in mathematical problem-solving research // Acquisition of mathematics concepts and processes / R. Lesh, M. Landau (Eds.). 1994. p.229-261.
9. Mathematics Higher 2 // Singapore MOE and University of Cambridge International Examinations URL: https://www.seab.gov.sg/content/syllabus/alevel/2017Syllabus/9758_2017.pdf (дата обращения: 25.02.2024).
10. Johansen M.W., Sørensen H.K. Invitation til matematikkens videnskabsteori // Copenhagen, Samfunds Litteratur, 2014. 265 p.
11. Прояева И.В., Колобов А.Н. Об использовании комплексных чисел в геометрии // Современные проблемы физико-математических наук: Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орел: Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, 2021. С. 136-140.
12. Ларин С.В. Роль и значение компьютерной анимации в школьной алгебре комплексных чисел // Информатика в школе. 2021. №2(165). С. 22-27.
13. Садыкова Е. Р., Разумова О.В. О методических вопросах изучения комплексных чисел в классах математического профиля // Математика и проблемы образования: Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Киров: Издательство "Веси", 2022. С. 257-259.
14. Главный тренд российского образования // Учительская газета URL: https://ug.ru/glavnyj-trend-rossijskogo-obrazovaniya-czifrovizacziya/ (дата обращения: 25.02.2024).
15. Бакушинский А., Власов В. Элементы высшей математики и численных методов. - М.: Просвещение, 2014. 336 с.
16. Понарин Я.П. Метод комплексных чисел в планиметрии // Математика в школе. 1991. №2. С. 46-54.
17. Иламанов Б.Б. Комплексный анализ в мире искусственного интеллекта: использование функций комплексного переменного в глубоком обучении // Вестник науки. 2023. №9 (66), Т.4. С. 368-371.
18. Боженкова Л.И., Капитонов Д.В. Введение понятия комплексных чисел при обучении учащихся классов естественно-математического профиля курсу алгебры и началам математического анализа // Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования: Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. Ишим, 2014. С.84-95.
19. Доронин Д.Ю., Куликова С.В. Практическое применение комплексных чисел // Молодежная наука для развития АПК : сборник трудов LX Студенческой научно-практической конференции, Тюмень: Государственный аграрный университет Северного Зауралья, 2023. С. 153-158.
20. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. М.: Дрофа, 2005. 416 с.

21. Иламанов Б.Б. Комплексный анализ в мире искусственного интеллекта: использование функций комплексного переменного в глубоком обучении // Вестник науки. - 2023. - №9 (66). Т.4. С. 368-371.
22. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М.: РХД, 2008. 316 с.
23. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. - М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2002. 40 с.
24. Тамер О.С. Технология обучения комплексным числам на основе осуществления межпредметных связей в системе непрерывного профессионального образования: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08. - Тольятти, 1999. 130 с.