УДК 37.091.3, 37.02

О возможностях организации исследовательской деятельности обучающихся на уроках математики

Белова Оксана Николаевна
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
Студент

Аннотация
Современное общество основной задачей обучения ставит научить школьников самостоятельно думать, анализировать информацию и отбирать наиболее существенное, выдвигать гипотезы и искать способы их проверки, формулировать выводы. В статье обсуждается возможность организации исследовательской деятельности в рамках классно-урочной системы посредством решения учебно-исследовательских задач. Исследовательские навыки формируют рассматриваемые в данной статье некоторые типы задач.
Ключевые слова: Исследовательская деятельность, поисковая деятельность, исследовательский метод, исследовательские задачи, способы решения, исследовательские навыки.

About the possibilities of organizing research activities of students in mathematics lessons

Belova Oksana Nikolajevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
student

Abstract
Modern society sets the main task of teaching to teach students to think independently, analyze information and select the most essential, put forward hypotheses and look for ways to test them, to formulate conclusions. The article discusses the possibility of organizing research activities within the classroom system by solving educational research problems. Research skills form the types of tasks considered in this article.
Keywords: Research activity, search activity, research method, research tasks, solutions, research skills.

Современный объём знаний человечества и непрерывно увеличивающийся поток информации в мире ставит основной задачей обучения добывать новую информацию, оперируя достаточным объемом базовых понятий. Анализ информации и отбор наиболее существенного, выдвижение гипотез и поиск способов их проверки, формулирование выводов – всё это необходимо для эффективного решения учебных, профессиональных и бытовых задач. Таким образом, современное состояние науки требует такого обучения, которое вооружает обучающихся умениям самостоятельного добывания знаний. Этой цели и служит исследовательский подход в обучении.

Разные авторы по-разному определяют исследовательскую деятельность обучающихся.

В [1] говорится, что исследовательский метод в обучении заключается в самостоятельном решении обучающимися проблем, трудных задач познавательного и практического характера. Учащиеся открывают новое, но это субъективно новое, известное науке, но неизвестное ученику.

Большинство авторов связывают исследовательскую деятельность учащихся с решением специальных исследовательских задач. Основными чертами задач исследовательского характера являются: постановка вопроса, при котором ответ не очевиден; широта условия, допускающая несколько вариантов его трактовки или соответствующая нескольким конфигурациям; скрытость метода решения [2].

В работе А.Г. Иодко исследовательская деятельность определяется как «совокупность целесообразных действий поискового характера, ведущая к открытию неизвестных для учащихся фактов; теоретических знаний и способов деятельности» [3].

Н.В. Толпекина определяет учебное исследование как вид поисковой познавательной деятельности учащихся, способствующей «формированию следующих умений: дополнения новых предметных знаний, приемы и способы действий; самостоятельно организованный поиск; достижение поставленных целей обучения; формирование мыслительных операций...» [4].

Существуют и другие определения исследовательского метода, однако все педагоги сходятся во мнении, что сущность исследовательского метода заключается в том, что результат работы неизвестен ученикам, он самостоятельно должен быть добыт ими.

В данной статье под исследовательским методом обучения будем понимать самостоятельное решение обучающимися новой для них проблемы с применением таких элементов научного исследования, как наблюдение и самостоятельный анализ фактов, выдвижение гипотезы и ее проверка, формулирование выводов, законов и закономерностей [5].

При таком методе обучения задания могут предлагаться ученикам в разных формах. Это или задания, поддающиеся быстрому решению, или задания, требующие целого урока, домашние задания на определенный срок, при этом, исследовательский метод обучения применим на всех ступенях обучения с учетом возрастных возможностей и подготовки учащихся.

Математика – уникальная дисциплина, предлагающая огромные возможности для развития исследовательских навыков обучающихся. Приступая к решению любой математической задачи, необходимо проанализировать её содержание, выбрать метод решения и реализовать его. При необходимости, быть готовым применить другой метод. Прежде, чем начать решение, прогнозировать возможный результат, опираясь на «математическую интуицию».

Формулировка задачи может строиться по-разному. Одни из них больше направлены на отработку стандартных действий в стандартных ситуациях, другие в большей мере формируют у обучающегося навыки исследовательской деятельности. Ниже описаны некоторые типы задач, которые, по нашему мнению, являются наиболее эффективными для обучения исследовательским навыкам.

1 Задачи с альтернативным условием

Под задачами с альтернативным условием будем понимать задачи, допускающие возможность различных трактовок условия задачи из-за присутствия в нем неоднозначности. Эти задачи предполагают вариативность в решении, рассмотрение разных случаев внутри сформулированного условия. В ходе решения таких задач необходимо рассматривать несколько возможных вариантов условия, а ответ формулируется только после того, как все эти возможности будут исследованы [6].

Раньше в заданиях ЕГЭ обязательно присутствовала планиметрическая задача, предполагающая две или более возможных конфигураций подпадающих под одно описание. Для получения полного балла за это задание требовалось обязательное рассмотрение всех случаев.

Пример: Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка С, на другой - точки А и В, причем треугольник АВС - равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдете радиус окружности, вписанной в треугольник АВС.

Приведённая формулировка допускает три возможных случая:

- $AC = BC = 13$;
- $AB = BC = 13$ и стороны AB и BC образуют тупой угол;
- $AB = BC = 13$ и стороны AB и BC образуют острый угол.

Задачи с альтернативным условием учат школьников смотреть на одну ситуацию с разных сторон, развивают «пространственный» взгляд на задачи, что является неотъемлемым навыком исследователя.

Значимость задач с альтернативным условием в школьном курсе планиметрии, а также важность визуализации таких задач обосновывается, в частности в работе [7].

2 Задачи на выбор оптимального варианта

Задачи, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, зачастую являются многовариантными. Задачи на выбор оптимального варианта – это задачи, в которых среди предложенного множества возможных вариантов приходится отыскивать наилучшие в данных условиях. Разработчики контрольно-измерительных материалов к ОГЭ и ЕГЭ наполняют такие задачи практико-ориентированным содержанием. Решение этих задач предполагает умение использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, строить и исследовать простейшие математические модели.

Зачастую, в задачах на выбор оптимального варианта предлагается вычислить несколько вариантов стоимости товара или услуги и выбрать самый выгодный вариант (менее затратный). Для вычислений необходимо внимательно проанализировать условие задачи, для этого удобно систематизировать данные, например, сформировав таблицу. Далее сделать расчет по каждому варианту и выбрать самый выгодный.

Например: В результате реформы системы транспорта в городе были введены новые билеты на метро на 1, 5, 10, 15 и 20 поездок. В таблице А приведена стоимость билетов:

Таблица А – Стоимость билетов

Количество поездок	1	5	10	15	20
Цена билета	35	130	170	240	300

Мише нужно совершить за месяц 44 поездки. Какие билеты, и в каком количестве ему нужно приобрести для этого? (Всероссийская олимпиада школьников по информатике, 2013-14 уч. год, первый (школьный) этап. г. Москва)

Решение.

Стоимость одного билета в каждом из предложенных вариантов: 35, 26, 17, 16 и 15 денежных единиц соответственно. Рассмотрим варианты, использующие самые дешёвые билеты:

Количество билетов	Стоимость
$20 \cdot 2 + 5 = 45$	$300 \cdot 2 + 130 = 730$
$20 + 15 + 10 = 45$	$300 + 240 + 170 = 710$

Все остальные варианты будут, очевидно, дороже. Поэтому ответ: надо купить по одному билету на 10, 15 и 20 поездок, стоимость составит 710 денежных единиц.

3 Решение одной задачи разными способами

Отыскание разных способов решения одной задачи, оценка этих способов на рациональность – является важным фактором для развития исследовательских навыков. Это позволяет развивать гибкость ума, проявляющуюся в умении видеть новое в уже известном, выделении скрытой сути, использовании разных теоретических фактов, практических методов и приёмов, анализе возможностей применения их к данной конкретной ситуации.

Математика, как наука, имеет множество подразделов, при этом, они не являются изолированными друг от друга, они взаимопроникают друг в друга, что позволяет изучать одни и те же объекты с помощью разных математических инструментов.

Например, можно сказать, что $y = 200x + 5$ есть аналитическое задание линейной функции, и говорить о её свойствах (области определения, монотонности, и т.п.), а можно сказать, что это уравнение задаёт прямую на плоскости с заданной на этой плоскости декартовой системой координат. Можно исследовать положение этой прямой относительно координатных осей, а дописав уравнение ещё одной прямой $y = 200x$ можно говорить об их взаимном расположении на плоскости. Связь этих двух подходов можно сформулировать так:

*геометрической иллюстрацией такого понятия математического анализа, как линейная функция, является прямая, что приводит к понятию – график функции;

*алгебраически геометрический объект – прямая, может быть описан линейным уравнением, что приводит к понятию уравнение прямой на плоскости.

Умение видеть один и тот же математический объект «глазами» разных математических инструментов, умение один реальный сюжет смоделировать, используя различные математические модели – это и есть суть исследовательского процесса.

Например: Сегодня утром собираясь на работу, я заметил, что минутная и часовая стрелки часов совпали между 6 и 7 часами. Интересно, какое точное время показывали эти часы [8].

Можно привести существенно различные способы решения сформулированной задачи. Приближённое решение даёт способ, использующий приемы численных методов. Точное решение дают способы, использующие геометрическую прогрессию, линейные функции, стандартную таблицу: «Скорость-время-расстояние» и составление уравнения.

Решение 1. Такой способ решения, обычно, предлагают школьники, незнакомые с непрерывностью природы времени.

За 60 минут – минутная стрелка успевает описать целую окружность – 360^0, значит за 1 минуту она двигается на 6^0. Часовая стрелка за 60 минут описывает дугу окружности в 30^0, следовательно, за 1 минуту - $0{,}5^0$. Стрелки совпали между 6 и 7 часами, т.е. нас интересует интервал между 6ч. 30 мин. и 6 ч. 35 мин.

Будем считать 6.30 началом отсчета, в это время угол между часовой и минутной стрелкой был 15^0.

время	Поворот часовой стрелки	Поворот минутной стрелки
6.30	15^0	0^0
6.31	$15{,}5^0$	6^0
6.32	16^0	12^0

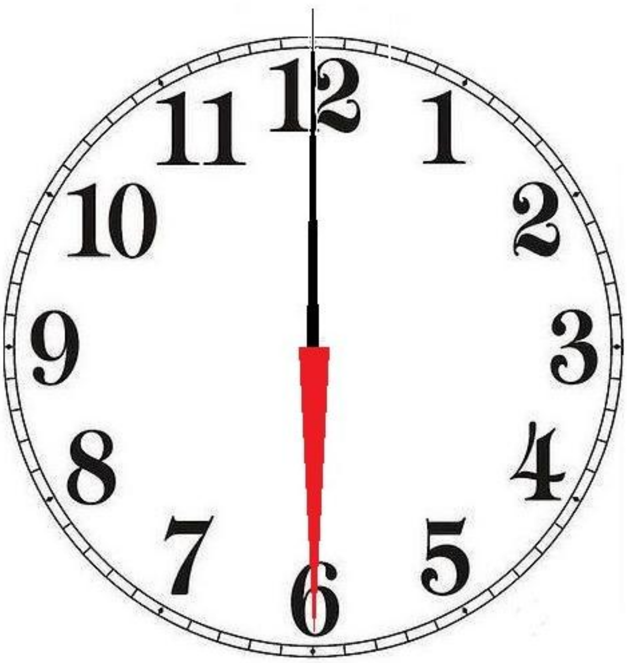
6.33	$16{,}5^0$	18^0

Ответ учащегося: стрелки совпали между 6ч. 32мин. и 6ч. 33 мин.

Из приведенного решения видно, что время воспринимается школьниками, как дискретная величина, и дробление времени на все более мелкие единицы не даст **точного** решения задачи. Чтобы перейти к отысканию точного решения, обучающийся должен, в первую очередь, осознать, что оно может быть выражено не обязательно в целом количестве минут или секунд или каких-то долей секунд.

Решение 2. Данное решение использует тему «Геометрическая прогрессия» и описано в философских и литературных произведениях.

Иллюстрацией движения времени может служить движение стрелок на циферблате. По условию задачи стрелки совпали между шестью и семью часами, поэтому начнём наблюдать за их движением в шесть часов. В шесть часов они были расположены следующим образом (рис. а).



а б

После этого минутная стрелка, отправилась «в погоню» за медленно ползущей часовой стрелкой (рис. б). Теперь надо ответить на два важнейших вопроса:

1. Чем измерять расстояния на циферблате? (Минутными делениями)

2. Во сколько раз скорость минутной стрелки больше, чем скорость часовой стрелки? (За 60 минут – минутная стрелка пробегает все 12 секторов на часах. Часовая стрелка за 60 минут пробегает 1 сектор. То есть часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной.)

Чтобы догнать часовую стрелку, минутной надо сначала преодолеть 30 делений, но, за это время минутная стрелка пройдёт свой путь – он будет в 12 раз меньше, то есть $\frac{30}{12}$ делений. Дальше, пока минутная стрелка преодолеет двенадцатую часть от тридцати делений, часовая отползёт на двенадцатую часть этого расстояния, и так дальше… Значит, чтобы узнать точное время, когда встретились часовая и минутная стрелки, надо посчитать бесконечную сумму:

$$30+\frac{30}{12}+\frac{30}{12^2}+\frac{30}{12^3}+\frac{30}{12^4}+\ldots=S$$

$$30+\frac{30}{12}+\frac{30}{12^2}+\frac{30}{12^3}+\frac{30}{12^4}+\ldots=S \qquad \Big|\cdot 12$$

$$30\cdot 12+30+\frac{30}{12}+\frac{30}{12^2}+\frac{30}{12^3}+\ldots=12S$$

$$30\cdot 12+30+\frac{30}{12}+\frac{30}{12^2}+\frac{30}{12^3}+\frac{30}{12^4}+\ldots=12S$$

$$30+\frac{30}{12}+\frac{30}{12^2}+\frac{30}{12^3}+\frac{30}{12^4}+\ldots=12S-30\cdot 12$$

$$S=12S-30\cdot 12$$

$$-11S=-360$$

$$S=\frac{360}{11}=32\frac{8}{11} \quad (\text{минут})$$

Ответ: На часах было точно 6 часов и $32\frac{8}{11}$ минут (это примерно, 32 минуты и 44 секунды).

Решение 3. Основная идея следующего решения состоит в том, что моделями непрерывных процессов могут служить непрерывные функции. Движение часовой и минутной стрелки осуществляется равномерно, значит, может быть описано с помощью линейной функции.

Будем измерять расстояния, преодолеваемые стрелками на часах, минутными делениями. Изучим зависимость между временем (t), измеряемым в минутах, и расстоянием, проходимым стрелкой за это время (S). Началом отсчета расстояний и времени считаем 12 часов.

Минутная стрелка за каждую минуту проходит одно минутное деление, значит, для минутной стрелки $S_м=t$. Но, через 60 минут эта стрелка возвращается в исходное положение. То есть, искомая функция для минутной стрелки – это кусочно-линейная функция, периодическая, с наименьшим положительным периодом – 60 минут:

$$S_м=t-60k,\ k\le t<k+1,\quad k\ge 0.$$

Часовая стрелка за каждую минуту проходит $\frac{1}{12}$ часть минутного деления, значит, для неё $S_ч=\frac{1}{12}t$. Но, через 720 минут эта стрелка возвращается в исходное положение. То есть, искомая функция для часовой стрелки – это кусочно-линейная функция, периодическая, с наименьшим положительным периодом – 720 минут:

$$S_ч = \frac{1}{12}t - 720n,\ n \le t < n+1, \quad n \ge 0.$$

Для наглядности, построим графики функций для двенадцати часового периода времени. Точки пересечения графиков соответствуют моментам совпадения стрелок (рис. 3).

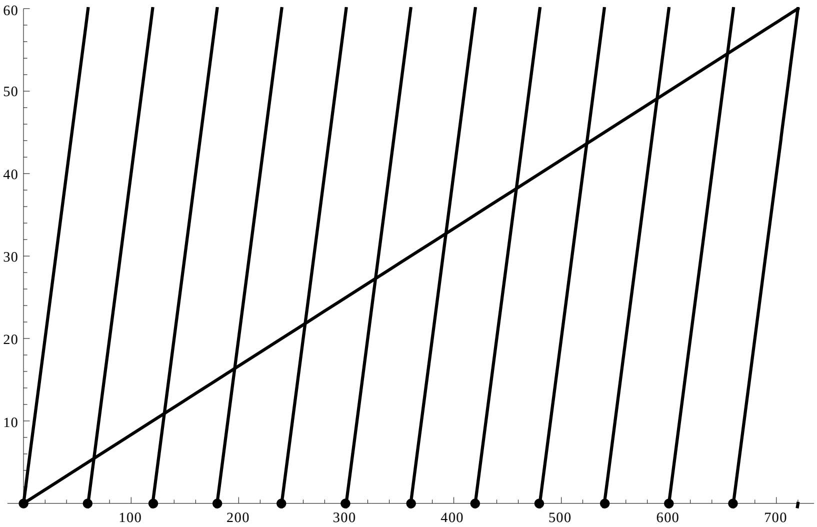


Рисунок 3. Графики функций $S_м$ и $S_ч$ при $0 \le t \le 720$

В задаче надо найти точку пересечения, расположенную между шестью и семью часами, то есть между 360-ой и 420-ой минутами (рис. 4):

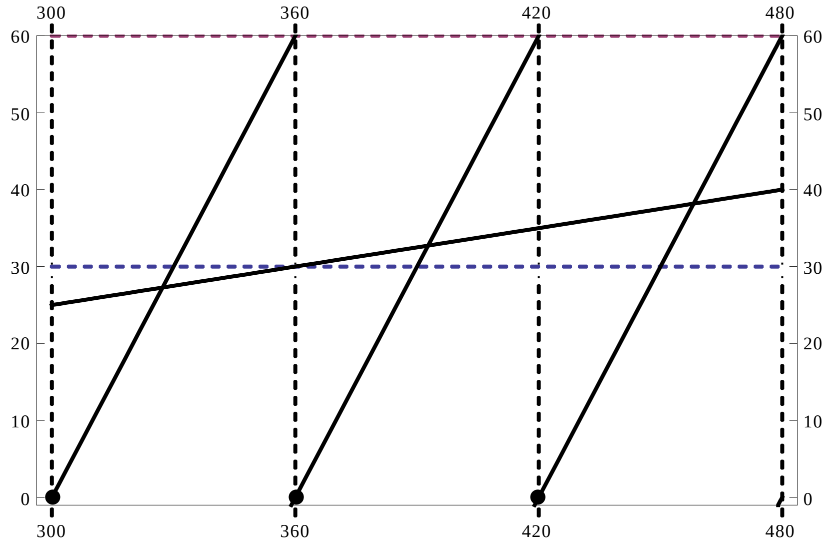


Рисунок 4. Графики функций $S_м$ и $S_ч$ при $300 \le t \le 480$

$$\begin{cases} S_м = t - 360 \\ S_ч = \dfrac{1}{12}t \end{cases} \qquad \frac{1}{12}t = t - 360 \qquad t = \frac{4320}{11} = 392\frac{8}{11}.$$

$392\frac{8}{11}=360+32+\frac{8}{11}$ минут – это шесть часов, тридцать две минуты и, почти, 44 секунды.

Решение 4. Данное решение может быть рассмотрено при изучении темы «Уравнения». Переформулируем задачу: Из точки А (12 часов на циферблате) с некоторой скоростью отправилась минутная стрелка, в тот же момент и в том же направлении из точки В (6 часов на циферблате) с меньшей скоростью отправилась часовая стрелка (рис. б). Через какое время минутная стрелка сравняется с часовой?

Обозначим:

t - время, измеряемое в минутах;

S - расстояния на циферблате, измеряемые в минутных делениях;

V - скорость движения стрелки по циферблату;

x - неизвестная величина – время, отсчитываемое с начала движения, через которое часовая стрелка сравняется с минутной.

Так как минутная стрелка за одну минуту проходит одно минутное деление, то её скорость $V_м=1\frac{мин.дел.}{мин.}$. При этом, часовая стрелка движется в двенадцать раз медленнее, значит её скорость $V_м=\frac{1}{12}\frac{мин.дел.}{мин.}$

Оформим данные задачи в виде таблицы:

	t	V	S
Минутная стрелка	x	1	x
Часовая стрелка	x	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}x+30$

Следовательно, для решения задач, необходимо решить уравнение $x=\frac{1}{12}x+30$, $x=\frac{360}{11}=32\frac{8}{11}$ – минутная стрелка сравняется с часовой через тридцать две минуты и, почти, 44 секунды после шести.

Важно, что приведенные выше решения можно предлагать обучающимся при изучении различных разделов математики, в том числе, высшей математики (например, в решении 1 можно использовать предельный переход и теорию числовых рядов). Поразительная красота этой задачи заключается в краткости и простоте формулировки, за которой кроется невероятная глубина как математического, так и философского содержания.

О формировании исследовательской компетентности посредством решения задач различными способами отмечается так же в [9].

4 Сюжетные задачи

Огромный потенциал математики для развития исследовательских навыков обучающихся обусловлен ключевой идеей: всякая формула в математике имеет практическую интерпретацию. Любое буквенно-числовое выражение, формула, уравнение или функция является описанием какой-то реальной ситуации. Например, глядя на запись $y = 200x + 5$, можно увидеть не только линейную функцию или линейное уравнение с двумя неизвестными, но и реальный сюжет. Это человек задумался у банкомата над тем, сколько же наличных ему надо снять для покупки конфет (так уж случилось, что в магазине, где продаются его любимые конфеты, нет безналичного расчёта). В этом уравнении: 200 – стоимость одного килограмма конфет в рублях, x - вес планируемой покупки в килограммах, 5 – стоимость пакета в рублях (так уж случилось, что с собой не взял, а конфет надо купить немало), y - минимальная сумма, которую ему надо иметь, чтобы оплатить покупку.

Решение сюжетных задач играет главную роль в осознании этой идеи. Никак иначе невозможно объяснить, что формулы могут быть наполнены жизненным содержанием. Формализация условия текстовой задачи приводит к появлению уравнения, системы уравнений или неравенств, функции или системы функций.

Помимо уже сформулированной приведём ещё один пример такой задачи.

Например: Для оформления окна прямоугольной формы на веранде бабушка попросила дедушку прибить 10 гвоздиков в верхней части оконного проёма и 5 гвоздиков по его левой части. По задумке бабушки надо каждую пару гвоздиков, расположенных на разных частях оконного проёма, соединить красивой лентой, а каждое пересечение двух лент украсить бантиком (рис. 1). Известно, что дедушка прибил гвоздики так, что никакие три ленты не будут пересекаться в одной точке. Сколько бантиков понадобится бабушке для оформления окна на веранде.

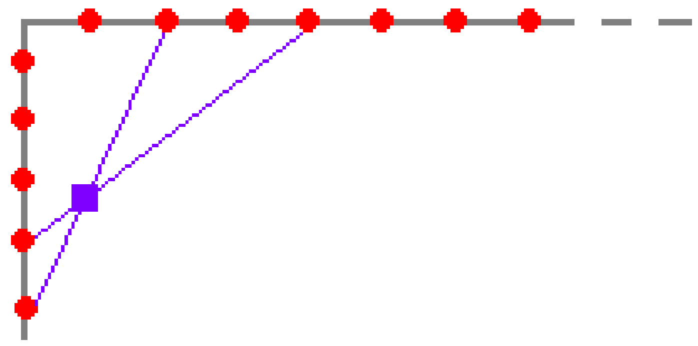


Рисунок 1. Схема оформления окна

Решение.

Пронумеруем гвоздики в левой части окна, начиная с верхнего, с первого по пятый.

Сначала привяжем десять лент от первого гвоздика к каждому из тех гвоздиков, которые расположены в верхней части оконного проёма. Ни одного пересечения нет.

Теперь привяжем десять лент от второго гвоздика к каждому из тех гвоздиков, которые расположены в верхней части оконного проёма. Количество пересечений:

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1+0.$$

Далее привяжем десять лент от третьего гвоздика к каждому из тех гвоздиков, которые расположены в верхней части оконного проёма. Количество пересечений:

$$2\cdot(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0).$$

Далее привяжем десять лент от четвёртого гвоздика к каждому из тех гвоздиков, которые расположены в верхней части оконного проёма. Количество пересечений:

$$3\cdot(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0).$$

И для пятого гвоздика количество пересечений:

$$4\cdot(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0).$$

Суммируя всё вместе, получим:

$$(1+2+3+4)\cdot(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)=\frac{4\cdot5}{2}\cdot\frac{9\cdot10}{2}=10\cdot45=450.$$

На окне у бабушки появится 450 бантиков!

В процессе решения сюжетных задач формируются такие приёмы умственной деятельности как: переформулирование, использование системы вопросов, составление таблиц и графических иллюстраций и др. Один из этапов работы над задачей – исследование построенной математической модели, интерпретация результата исследования математической модели в заданной ситуации.

Рассмотрим задачу на предположение: торговец продает орехи двух сортов: одни по 90 рублей, другие по 60 рублей за килограмм. Он хочет получить 50 килограммов смеси по 72 рубля за килограмм. Сколько для этого потребуется орехов каждого сорта?

Решение.

Запишем условие задачи в виде таблицы.

	Цена, руб.	Количество, кг	Стоимость, руб.
1сорт	90	?	
2сорт	60	?	
Смесь	72	50	

Зная цену смеси и количество проданных орехов можно найти стоимость смеси или выручку, которую хочет получить торговец:

$$72\cdot50=3600 \text{ руб.}$$

Получили задачу на предположение.

Предположим, что все орехи торговец продает по цене 1-го сорта, тогда

$$90 \cdot 50 = 4500 \text{ руб.}$$

Именно столько выручил бы торговец и переплата составила бы

$$4500 - 3600 = 900 \text{ руб.}$$

За счет чего? За каждый килограмм орехов 2-го сорта торговец переплачивал бы

$$90 - 60 = 30 \text{ руб.}$$

в этом случае торговец продал $900 : 30 = 30$ кг. орехов 2-го сорта и тогда орехов 1-го сорта было продано $50 - 30 = 20$ (кг .

Ответ. Потребуется 30 кг орехов 2-го сорта и 20 кг орехов 1-го сорта.

При решении этой задачи возможны такие вопросы обучающимся:

- почему предположение о продаже орехов 2-го сорта недопустимо;
- каким числом может выражаться цена орехов каждого сорта, чтобы задача имела решение;
- какова минимальная цена орехов 2-го сорта для решения данной задачи.

5 Задачи с параметром

Изучение многих физических и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Наиболее трудной и важной частью решения таких задач является исследование процесса в зависимости от параметров. Овладение методикой решения задач с параметрами существенно повышает уровень подготовки учащихся, позволяет по-новому, как бы изнутри взглянуть на «банальные» функциональные зависимости и уравнения.

Задачи с параметрами создают условия для проявления творческой активности учащегося, выражающейся в стремлении познать объективно новые факты, используя теорию научных исследований. В ходе решения этих задач ученик обучается применять математические знания к практическим нуждам; они же способствуют формированию исследовательских умений.

Задания исследовательского характера существенно отличаются от традиционных заданий уже своей формулировкой. Так большая часть заданий школьных учебников звучит так: «Решить уравнение», «Доказать, что выражение … больше выражения …», «Упростите…» и т.п.

В формулировках исследовательских заданий нет явного указания на результат решения задачи, его необходимо самим найти и обосновать. Формулировки заданий могут быть такими: «Исследовать …», «Верно ли, что если …, то …», «Найти необходимое условие, при котором …», «Существуют ли такие значения …, при которых выполняется условие …» и т.п. Задания с параметром очень богаты на подобные формулировки.

Например:

1. Может ли корень уравнения $-3(x-4) - b = x - 11$ являться положительным числом? При каком условии?

2. Верно ли, что при любом значении k система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = k \end{cases}$ имеет единственное решение?

3. Могут ли не пересекаться графики функций $y = ax^2 + 3x - 4$ и $y = ax - 5$?

После решения задач с параметрами необходимо, чтобы учащиеся осуществляли исследование ответа, вывода (то есть ставили вопрос о существовании решения, о числе решений, об особых случаях, какие могут представиться) при рассмотрении каждой задачи, особенно такой, которая предлагается в общем виде. Для формирования исследовательских умений нужно так же постепенно развивать у учащихся умение определять, какие частные случаи необходимо выделять для указания ключевых значений параметра при полном исследовании задачи с параметром.

Заметим, что решение уравнений, неравенств, систем уравнений, систем неравенств зачастую удобно решать графическим методом, который сам по себе является прекрасным инструментом для развития исследовательских умений обучающихся.

Например:

Исследуйте уравнение с параметром $|x-3| - a|x+3| = 0$.

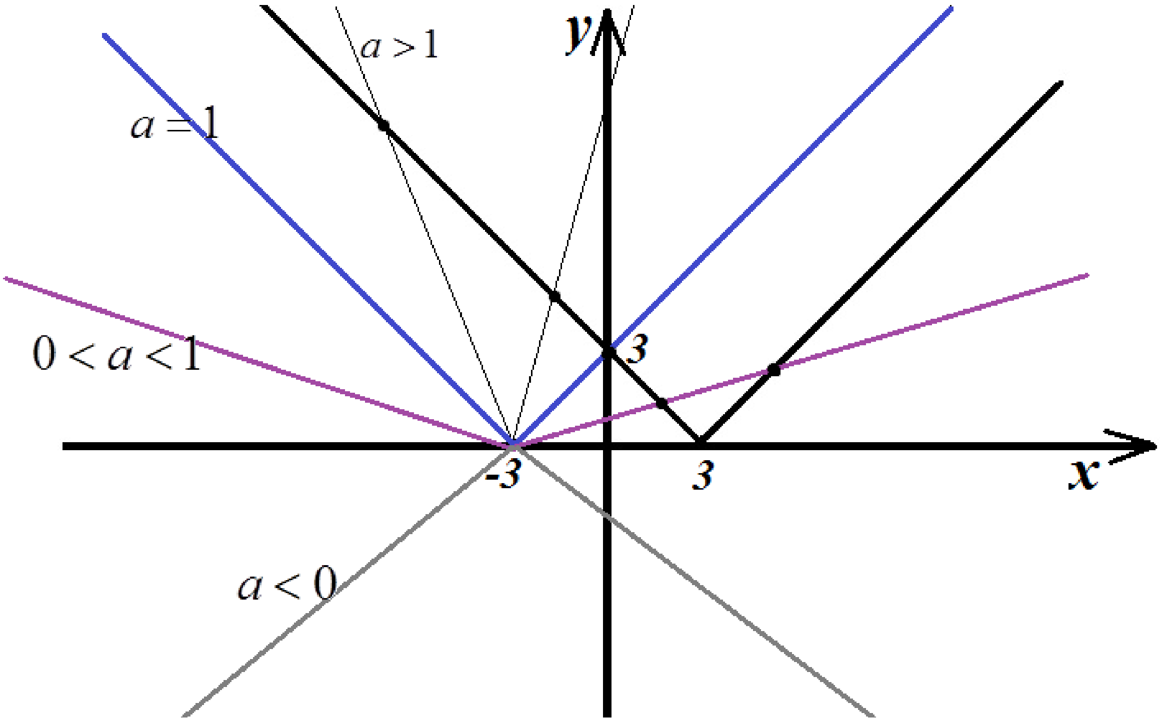
Решение.

Перепишем уравнение в виде $|x-3| = a|x+3|$.

Исследуем графики функций $y = |x-3|$ и $y = a|x+3|$ в плоскости xOy. Решениям уравнения будут соответствовать абсциссы точек пересечения графиков.

Графиком функции $y = |x-3|$ - является «галочка» с вершиной в точке $(3,\,0)$ и ветвями, расположенными под углом 45^0 к оси абсцисс.

При всех действительных значениях параметра a графики функций $y = a|x+3|$ образуют семейство «галочек» с вершинами в точке $(-3,\,0)$. При $a \in (0,\,+\infty)$ ветви «галочек» смотрят вверх, при $a = 0$ график функции $y = 0$ совпадает с осью абсцисс, при $a \in (-\infty,\,0)$ ветви «галочек» смотрят вниз.



Анализируя чертёж, замечаем, что:

- при $a \in (-\infty, 0)$ графики функций $y = |x-3|$ и $y = a|x+3|$ не пересекаются;
- при $a = 0$ единственная точка пересечения графиков $(3, 0)$;
- при $a \in (0, 1)$ две точки пересечения, обе образованы пересечением прямой $y = a(x+3)$ «галочки» $y = |x-3|$;
- при $a = 1$ единственная точка пересечения графиков $(0, 3)$;
- при $a \in (1, +\infty)$ две точки пересечения, обе образованы пересечением прямой $y = 3 - x$ «галочки» $y = a|x+3|$.

Найдем абсциссы указанных точек пересечения:

- при $a = 0$, $x = 3$;
- при $a \in (0, 1)$:

$$a(x+3) = x - 3 \qquad\qquad a(x+3) = 3 - x$$

$$x - ax = 3a + 3 \qquad\qquad x + ax = 3 - 3a$$

$$x(1-a) = 3(a+1) \qquad\qquad x(1+a) = 3(1-a)$$

$$x = \frac{3(1+a)}{1-a} \qquad\qquad x = \frac{3(1-a)}{1+a}$$

- при $a = 1$, $x = 0$;
- при $a \in (0, +\infty)$:

$$a(x+3) = 3 - x \qquad\qquad -a(x+3) = 3 - x$$

$$x = \frac{3(1-a)}{1+a} \qquad\qquad x = \frac{3(1+a)}{1-a}$$

Ответ: - при $a \in (-\infty, 0)$ уравнение решений не имеет;

- при $a = 0$, $x = 3$;
- при $a \in (0, 1)$, $a \in (1, +\infty)$, $x_1 = \dfrac{3(1+a)}{1-a}$, $x_2 = \dfrac{3(1-a)}{1+a}$;
- при $a = 1$, $x = 0$.

Подробнее методические аспекты обучения элементами исследовательской деятельности на уроках математики излагаются в [10].

В заключении заметим, что каждый ребёнок с рождения – исследователь. Естественное его поведение – узнавать и исследовать новое каждый день. Со временем, начиная понимать язык взрослых, ребёнок привыкает отказываться от самостоятельного поиска «истины», что в подростничестве выливается в бунт против того, что декларируется им извне. Понимание математических законов, в силу их абстрактности, представляет значительную сложность, и задача учителя состоит в том, чтобы активизируя познавательную деятельность ученика, помочь ему самостоятельно двигаться в поиске знаний.

Библиографический список

1. Теоретические основы подготовки и проведения уроков математики в средней школе: Учебно-методическое пособие/ Сост. В.И. Седакова. Сургут: РИО СурГПИ, 2003. 82 с.
2. Далингер В.А., Толпекина Н. В. Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. 256 с.
3. Иодко А.Г. Формирование у учащихся исследовательской деятельности процессе обучения химии: Автореферат на соискание ученой степени кпн. Минск, 1983. 17 с.
4. Толпекина Н.В. Методика организации учебных исследований при обучении учащихся решению уравнений, неравенств и их систем с параметрами: Автореферат на соискание ученой степени к.п.н. Омск, 2002. 23 с.
5. Белова О.Н. Применение исследовательского метода на уроках математики: Из опыта работы Оксаны Николаевны Беловой, учителя математики МОУ СОШ №1 г. Биробиджана. Биробиджан: ОблИУУ, 2009. – 24 с.
6. Демидова Т.Е., Тонких А.П. Теория и практика решения текстовых задач: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия», 2002. 288 с.
7. Беляева Е.А. Визуализация задач с альтернативным условием по планиметрии в математической среде GeoGebra Постулат. 2019. № 6
8. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. М.: Издательство «Экзамен», 2009. 286 с.
9. Кунгурова Я.В, Позднякова Е.В. Формирование исследовательской компетентности школьников на уроках математики // Информационно-

коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2016. № 2 (40). С. 44-50
10. Кириллова Д.А., Белова О.Н. Методические аспекты обучения элементам исследовательской деятельности на уроках математики // Мир науки. Педагогика и психология. 2019. Т. 7. № 4. С. 10.