

## **Формула прогиба внешне статически неопределимой трапециевидной фермы с перекрестной решеткой**

*Зименков Николай Андреевич*

*НИУ «МЭИ»*

*Студент*

### **Аннотация**

Получена точная формула для прогиба шпренгельной фермы регулярного типа с одной шарнирно-неподвижной и тремя шарнирно-подвижными опорами в зависимости от числа панелей. Вертикальная нагрузка приложена к узлу в середине верхнего пояса фермы. Прогиб фермы вычисляется с помощью формулы Максвелла – Мора в предположении, что все стержни упругие и имеют одинаковую продольную жесткость. Усилия в стержнях фермы находятся методом вырезания узлов. Формула для прогиба выводится методом индукции по результатам расчетов ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей в математической среде Maple. Для этого составляются рекуррентные уравнения для коэффициентов формулы прогиба, решения которых дает искомую аналитическую зависимость.

**Ключевые слова:** прогиб, регулярная ферма, математическая индукция, Maple, формула Максвелла – Мора.

## **Deflection formula of externally statically indefinable trapezoid truss with a cross grid**

*Zimenzov Nikolai Andreevich*

*NRU «MPEI»*

*Student*

### **Abstract**

An exact formula for deflection of a regular lattice-type truss with one pivotally fixed and three pivotally movable supports depending on the number of panels is obtained. The vertical load is applied to the knot in the middle of the upper chord of the truss. Farm deflection is calculated using the Maxwell – Mohr formula under the assumption that all the rods are elastic and have the same longitudinal rigidity. The forces in the truss rods are found by cutting the knots. The formula for the deflection is derived by the method of induction according to the results of calculations of a number of farms with a successively increasing number of panels in the mathematical environment of Maple. For this purpose, recurrence equations are compiled for the coefficients of the deflection formula, whose solutions give the desired analytical dependence.

**Keywords:** deflection, regular truss, mathematical induction, Maple, Maxwell-Mohr formula.

Результаты расчётов прогиба для некоторого класса конструкций имеют особое значение в проектировании. Такие расчёты позволяют подобрать оптимальное число панелей и размеры фермы, помогают выявить ошибки в численных расчётах.

В представленной ферме (рис. 1)  $n$  – число стержней в нижнем поясе, при этом всего ферма имеет  $m = 4n + 18$  стержней и  $k = 2n + 9$  узлов. Ферма имеет особенность в виде внешней статической неопределимости. Действительно, число узлов в два раза меньше числа стержней, и ферма статически определима, однако найти пять реакций опор обычным образом из решения трех уравнений равновесия не получится. Именно поэтому приходится составлять полную систему уравнений равновесия всех узлов одновременно, что, конечно, значительно проще делать программным образом, например, в системе Maple [1].

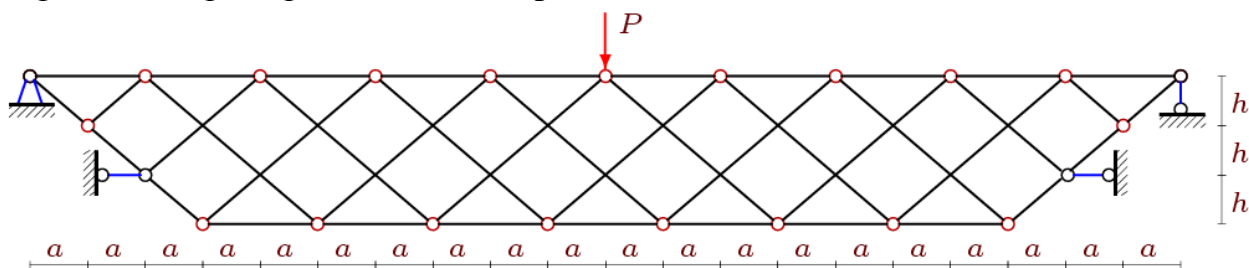


Рисунок 1 — Ферма при  $n = 7$

Расчеты показывают, что при некоторых значениях  $n$  определитель системы уравнений равновесия вырождается, что соответствует кинематической изменяемости конструкции. Решения возможны только для  $n = 3, 7, 9, 13, 15, \dots$ . Введем параметр  $u \in \mathbb{N}$ , для которого получим допустимые значения числа панелей:  $n = 1/2 + 3u + (-1)^u / 2$ . Ставится задача получения точной формулы прогиба шпренгельной фермы от параметра  $u$ , нагрузки и размеров.

Номера узлов и стержней нумеруются с левого верхнего узла (рис. 2).

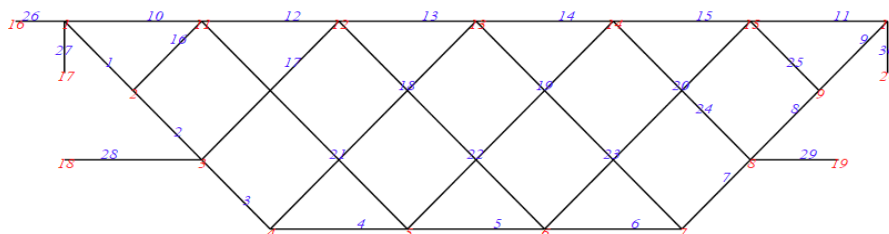


Рисунок 2 — Номера стержней и узлов фермы при  $n = 3$

Зададим координаты узлов, расположив начало координат в левом нижнем углу. Приведем соответствующий фрагмент программы. Координаты внутренних узлов:

```

k:=2*n+9:
for i to 3 do x[i]:=a*(i-1): y[i]:=(4-i)*h:
  x[i+n+4]:=(3 +2*n+i) *a: y[i+n+4]:=h*i;
end:
for i to n+1 do x[i+3]:=(1+2*i)*a:y[i+3]:=0: end:
for i to n+2 do x[i+n+7]:=2*a*i: y[i+n+7]:=3*h: end:

```

Координаты опорных шарниров (закреплены на "земле")

```

x[k-4]:=-5:      y[k-4]:=3*h:
x[k-3]:=0:      y[k-3]:=3*h-3:
x[k-2]:=0:      y[k-2]:=h:
x[k-1]:=x[n+5]+9: y[k-1]:=y[n+5]:
x[k]:=x[n+7]:   y[k]:=3*h-3:

```

Зададим стержни решетки фермы специальными векторами  $N[*,*]$  с указанием концов стержней:

```

for i to n+6 do N[i]:=[i,i+1]; end:
N[n+7]:=[1,n+8];N[n+8]:=[2*n+9,n+7];
for i to n+1 do N[i+n+8]:=[i+n+7,i+n+8]; end:
for i to n+2 do
  N[i+2*n+9]:=[i+1,i+n+7]:
  N[i+3*n+11]:=[i+n+7,i+4]:
end:

```

Опорные стержни:

```

N[m-4]:=[1,k-4]: N[m-3]:=[1,k-3]:
N[m-2]:=[3,k-2]: N[m-1]:=[n+5,k-1]: N[m]:=[n+7,k]:

```

Так как ферма имеет пять внешних связей, она является статически неопределенной. Методом вырезания узлов найдем усилия в стержнях, воспользовавшись программой [1]. Составим систему уравнений равновесия узлов, где в правой части системы – вектор нагрузок (фактически набор векторов - каждый столбец - одна нагрузка):

```

# Вектор нагрузок и матрица системы
V1:=Vector(m): G:=Matrix(m,m):
np:=n+8+k: V1[2*np]:=1:
# Решение системы уравнений равновесия
for i to m do
  Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
  Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:

```

```

#подстановка, упрощающая вид результата (длины раскосов)
L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2, sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
for j to 2 do
  t:=2*N[i][2]-2+j;
  if t<=m then G[t,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
  t:=2*N[i][1]-2+j;
  if t<=m then G[t,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
od;
od;
G1:=1/G: #Обратная матрица
S1:=G1.B1: # Вектор усилий в стержнях (ответ)

```

Для определения прогиба воспользуемся формулой Максвелла – Мора [2,3], в которую по условию недеформируемые опорные стержни не входят:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где  $l_i$  – длина  $i$ -го стержня,  $S_i^{(P)}$  – усилия от действия внешней нагрузки,  $S_i^{(1)}$  – усилия в стержнях фермы от действия единичной силы, приложенной в точке определения прогиба,  $EF$  – жесткость стержней (остается постоянной). В данной постановке  $S_i^{(P)} = S_i^{(1)}$ .

Получим решения для  $u$  изменяющегося от 1 до 14 с шагом 1. Применяя метод индукции, развитый в работах [4-14] применительно к арочным фермам и в [15-27] для балочных ферм, обобщим результат. Вид формулы прогиба не меняется от числа панелей и имеет следующий вид:

$$EF\Delta_u = P(A_u a^3 + C_u c^3) / h^2,$$

где  $a, h$  и  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  – геометрические параметры фермы (рис. 1).

Для коэффициентов  $A_u$  и  $C_u$ , последовательно применяя операторы **rgf\_findrecur** (из специализированного пакета **genfunc**) и **rsolve**, получаем зависимости:

$$A_u = \left( \frac{(6u+1)(-1)^u}{4} + u^3 + 3u^2 + 5u + \frac{7}{4} \right),$$

$$C_u = \left( \frac{(-1)^u}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3u}{2} \right).$$

В работах [28-32] приведены примеры использования метода индукции в более сложных пространственных системах.

## Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11 – М.: Физматлит, 2010. 264 с.
2. Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б.

- Строительная механика. В 2 кн. Кн. 1. Статика упругих систем М.: Высшая школа, 2007. 511 с.
3. Белоконь М.А. Строительная механика. М. : Проспект, 2015. 166 с.
  4. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
  5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
  6. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
  7. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
  8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
  9. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
  10. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44–55.
  11. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
  12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
  13. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
  14. Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
  15. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 19–24.
  16. Шикин К. Однопараметрический вывод формулы для прогиба балочной фермы типа Финка // Постулат. 2018. № 10(36).
  17. Пережилова Е. Д. Формула для прогиба консольной фермы под действием распределенной нагрузки по верхнему поясу // Постулат. 2018. № 12.
  18. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
  19. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской

- фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
20. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Строительство и архитектура. 2017 Vol. 5. Issue 2 (15): 50–54
21. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267-272.
22. Egorov S.S. The inductive method of solving the problem of deflection of the symmetric core structures of complex shape in the system Maple for arbitrary number of panels// Science Almanac. 2017. 3-3 (29). С. 254-257. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.254 <http://ucom.ru/doc/na.2017.03.03.254.pdf>
23. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. 2019. №2. С. 20-23.
24. Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S. Analysis of the deflection of flat roof trusses // Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 262-265. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.262
25. Kirsanov M.N., Razananairina P.C. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. Postulat, 2017. No. 9.
26. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21–28.
27. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
28. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
29. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
30. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
31. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
32. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.