УДК 519.853

Основы теории и методологии решения экстремальных задач методом Лагранжа

Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
д.т.н., заведующий кафедрой Информатики

Вашакидзе Нателла Семеновна
Сахалинский государственный университет
доцент кафедры Информатики

Филиппова Галина Викторовна
Сахалинский государственный университет
доцент кафедры Информатики

Аннотация
Предложена формальная постановка обобщенной экстремальной (оптимизационной) задачи. Изложены теоретические основы решения экстремальных задач методом множителей Лагранжа. Приведена геометрическая и экономическая интерпретация условия и множителей Лагранжа. Практическая апробация решения экстремальной задачи на примере задачи Дидоны выполнена в пакете *Wolfram Mathematica*, который является одной из наиболее мощных систем обработки информации методами символьной математики и компьютерной алгебры.
Ключевые слова: экстремальная задача, метод Лагранжа, символьная математика

Fundamentals of the theory and methodology for solving extremal problems by the Lagrange method

Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Vashakidze Natella Semenovna
Sakhalin State University.
Associate Professor, Department of Computer Science

Filippova Galina Viktorovna
Sakhalin State University.
Associate Professor, Department of Computer Science

Abstract
Formal statement of the generalized extreme (optimizing) task is offered. Theoretical bases of the solution of extreme tasks are stated by method of multipliers of Lagrange. Geometrical and economic interpretation of a condition and Lagrange's multipliers is given. Practical approbation of the solution of an extreme task on the example of Didona's task is executed in a Wolfram Mathematica package, which is one of the most powerful systems of information processing, by methods of symbolical mathematics and computer algebra.
Keywords: extremal problem, Lagrange method, symbolic mathematics

Введение

Целью настоящего исследования является разработка объединенной формальной теоретической и методологической базы классического метода решения экстремальных задач с помощью условий и множителей Лагранжа.

1 Постановка экстремальной задачи

Определение.

Под *экстремальной задачей* понимается задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения числовой функции на некотором множестве и, хотя бы одной точки этого множества, в которой функция принимает это наибольшее (наименьшее) значение.

Таким образом, экстремальная задача формулируется следующим образом: дано множество D и функция $f: D \to \mathbf{R}$, требуется найти такой элемент $\bar{x} \in D$, что для любого $x \in D$ выполняется неравенство:

$f\left(\bar{x}\right) \geq f\left(x\right)$ – *задача максимизации* (задача на максимум), (1)

или $f\left(\bar{x}\right) \leq f\left(x\right)$ – *задача минимизации* (задача на минимум). (2)

Экстремальную задачу с *областью определения* D и функцией f, которая называется *целевой функцией* задачи, будем обозначать через $\left(D, f\right)$ [1], указывая какой именно задачей она является: максимизации или минимизации. Например, запись:

$$\left(D, f\right): f\left(x\right) = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$D = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix};\ \mathbf{0} \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix};\ x_1, x_2 - \text{целые числа} \right\},$$

означает, что $\left(D, f\right)$ есть задача максимизации функции $f\left(x\right) = 3x_1 + x_2$ на множестве D точек пространства $\mathbf{R}^2$, для которых выполнены условия, указанные в фигурных скобках.

В дальнейшем предполагается, что D – подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ при некотором n.

Определения:

1. Точки пространства $\mathbf{R}^n$ называются *планами*.
2. Элементы множества D – *допустимыми планами*.

3. Допустимый план $\bar{x} \in D$, удовлетворяющий соотношению (1) в задаче максимизации, или (2) в задаче минимизации, называется *оптимальным планом* (*решением задачи*).

Экстремальная задача $\left(\mathbf{R}^n, f\right)$ называется задачей безусловной оптимизации.

Традиционный способ задания множества D допустимых планов состоит в его определении как множества решений некоторой системы уравнений и неравенств. Предполагается, что задана система функций $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, множество индексов $I : i \in I$ разбито на подмножество индексов уравнений I^{eq} и индексов неравенств $I^{in} : \left(I^{eq} \cup I^{in} = I,\ I^{eq} \cap I^{in} = \varnothing\right)$

$$D = \left\{x \in \mathbf{R}^n : f_i\left(x\right) \le 0,\ \left(i \in I^{in}\right);\ f_i\left(x\right) = 0,\ \left(i \in I^{eq}\right)\right\}.$$

Система уравнений и неравенств, определяющих множество D, называется *системой ограничений* (условий) задачи, а каждое из уравнений $f_i\left(x\right) = 0$ $\left(i \in I^{eq}\right)$ и неравенств $f_i\left(x\right) \le 0$ $\left(i \in I^{in}\right)$ - ограничением (условием) задачи. Очевидно, что каждое ограничение $f_i\left(x\right) = 0$ $\left(i \in I^{eq}\right)$ можно заменить равносильной ему системой неравенств $f_i\left(x\right) \le 0,\ -f_i\left(x\right) \le 0$.

Условие неотрицательности переменных формулируется следующим образом: $x_j \ge 0$ $\left(j \in J\right)$, где $\left|J\right| \le n$.

Запись x_j – «целое число» означает, что *j*–я компонента вектора *x* должна быть целочисленной. Иногда *j*–я компонента вектора *x* может принимать только два значения, например, 0 или 1. Такие переменные называются *булевыми*.

Очевидно, что одно и то же множество в общем случае может быть задано разными, естественно, равносильными системами уравнений и неравенств. Например, $\left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 \le -3,\ x_3 \ge 0\right\}$ и $\left\{x \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 = 1,\ x_1 - x_2 = 1,\ \mathrm{x} \ge 0\right\}$ определяют в $\mathbf{R}^3$ луч $\left\{x \in \mathbf{R}^3 :\ x = \left(1{,}0{,}0\right) + \alpha\left(0{,}0{,}1\right),\ \alpha \ge 0\right\}$.

Во множестве D может и не существовать оптимального плана, например, в случае неограниченности целевой функции на D или не замкнутости множества D. Так, в экстремальных задачах $\left(D, f\right)$: $f\left(x\right) = x \to \max$, $D = \left\{x \in \mathbf{R} : x > 0\right\}$ и $\left(D, -f\right)$ нет решений именно по этим причинам.

При формальном описании множества D оно может оказаться пустым. Наоборот, множество оптимальных планов задачи может состоять более чем из одного элемента. Поэтому предложение решить экстремальную задачу означает: указать, по крайней мере, один оптимальный план или установить, что задача не имеет решения.

2 Решение экстремальных задач методом множителей Лагранжа.

2.1 Описание метода.

Сформулируем экстремальную задачу:

$$(D, f): f(x) \to extr,$$
$$D = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right);\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) \right\} \tag{3}$$

Перейдем от исходной экстремальной задачи (3) к задаче безусловной оптимизации введя функцию Лагранжа (т.е. перейдем от задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум).

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - f_i(x)\right),$$

где λ_i - неопределенные множители Лагранжа.

Очевидно, выражение в скобках есть «невязка» ограничений – отклонение свободного члена b_i от значения функции $f_i(x)$.

Найдем частные производные функции Лагранжа по x_j и λ_i, и, приравняв их нулю, получим необходимое условие экстремума функции Лагранжа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) & (4) \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - f_i(x) = 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right) & (5) \end{cases}$$

Утверждение.

Экстремальное значение задачи (3) удовлетворяет условиям (4) и (5).

Действительно, пусть $\bar{x} \in D$ – решение задачи (3). Так как $\bar{x} \in D$, то $f_i\left(\bar{x}\right) = b_i$ и условие (5) выполняется. Тогда из функции Лагранжа следует:

$$L\left(\bar{x},\lambda\right) = f\left(\bar{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial L\left(\bar{x},\lambda\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial f\left(\bar{x}\right)}{\partial x_j} = 0,$$

т.е. условие (4) также выполняется.

Таким образом, каждая допустимая точка, $\bar{x} \in D$ в которой $f\left(\bar{x}\right)$ достигает экстремальное значение, является решением системы (4) – (5). Это необходимое условие для отыскания экстремума. Следовательно, решив систему (4) – (5) получим множество точек, в которых функция $f(x)$ может принимать экстремальные значения.

2.2 Геометрическая интерпретация условий Лагранжа.

Экстремальная задача с одним ограничением формулируется следующим образом:

$$(D, f): f(x) \to extr,$$
$$D = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : f_1(x) = b;\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) \right\} \tag{3'}$$

Функция Лагранжа и ее частные производные примут вид:

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda\left(b-f_1(x)\right);$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}-\lambda\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}\left(j=\overline{1,n}\right)\\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda}=b-f_1(x)\end{cases}.$$

Если переменных две, то можно дать геометрическую интерпретацию условий Лагранжа. Пусть $\overline{x}\in D$ – решение задачи (3′), тогда:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}=\lambda\dfrac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_2}=\lambda\dfrac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_2}\end{cases}\Rightarrow\nabla f=\lambda\nabla f_1,$$

т.е. в точке условного экстремума градиенты функций $f(\overline{x})$ и $f_1(\overline{x})$ коллинеарны.

Таким образом, в точке условного экстремума линия уровня функции $f(x_1,x_2)$ касается линии $f_1(x_1,x_2)=b$ (см. рис.1).

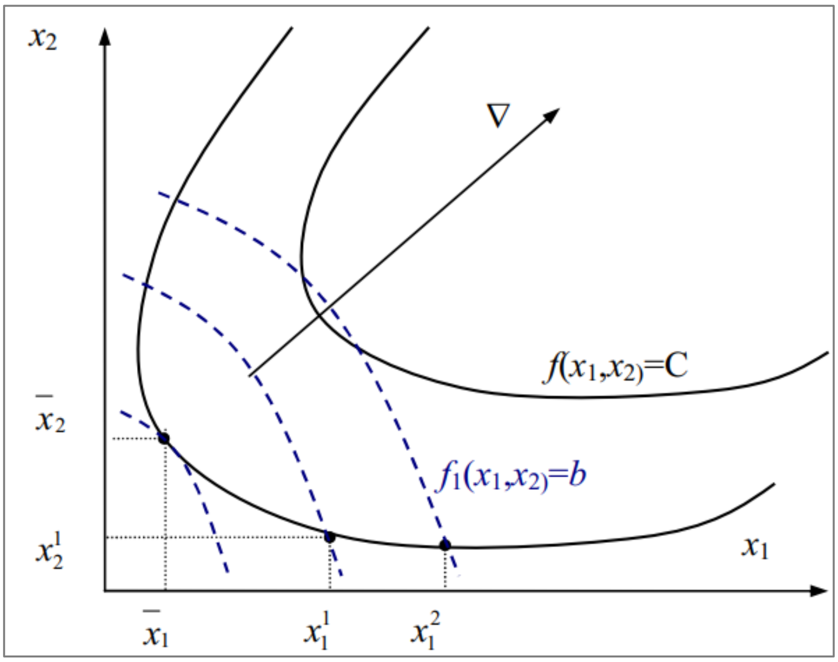

Рисунок 1. Линии уровня целевой функции и ограничения

2.3 Экономическая интерпретация множителей Лагранжа

Можно показать [2, 3], что

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial b_i}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial b_i}=\lambda_i;\left(i=\overline{1,m}\right),$$

или $\partial\overline{f}=\lambda_i\cdot\partial b_i$.

Очевидно, производная примерно равна отношению приращения функции к приращению аргумента (при приращении аргумента, стремящемся к нулю равенство становится строгим), т.е.:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial b_i} \approx \frac{\Delta \overline{f}}{\Delta b_i}.$$

Тогда $\Delta \overline{f} \approx \lambda_i \Delta b_i$.

Если положить изменение свободного члена i-го ограничения равным единице $\Delta b_i = 1$, то можно записать:

$$\Delta \overline{f} \approx \lambda_i$$

Таким образом, множители Лагранжа численно примерно равны изменению целевой функции $\left(\overline{f} = f\left(\overline{x}\right)\right)$ при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу.

Пусть целевая функция $f(x)$ определяет величину выручки от реализации продукции x, а свободный член b задает количество используемых ресурсов для производства продукции. Тогда экономическая интерпретация множителей Лагранжа заключается в том, что они (примерно) равны изменению выручки при изменении величины соответствующего используемого ресурса на единицу (теневая цена ресурса).

3 Задача Дидоны

3.1 Постановка задачи.

Веревкой длины b требуется огородить на берегу моря прямоугольный участок (см. рис. 2) наибольшей площади (берег считается прямолинейным)[1].

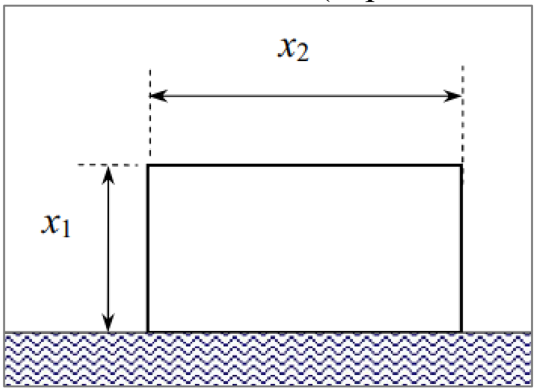

Рисунок 2. Иллюстрация к задаче Дидоны

Формулируем экстремальную задачу:

[1] Это один из вариантов так называемой задачи Дидоны, сестры тирского царя, - легендарной основательницы и первой властительницы Карфагена. Прибыв в Северную Африку, она купила у местных жителей прибрежный участок, который, по условию, можно огородить воловьей шкурой. Разрезав шкуру на тонкие ремешки, она связала из них тонкую веревку. Остальное – геометрическая задача: огородить участок наибольшей возможной площади.

$$(D, f): f(x) = x_1 \cdot x_2 \to \max,$$
$$D = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : f_1(x) = 2x_1 + x_2 = b;\ x_1, x_2 \ge 0 \right\}.$$

3.2 Решение задачи.

1. *Методом исключения*.

Выражаем, например, вторую переменную из первой.

$$2x_1 + x_2 = b \Rightarrow x_2 = b - 2x_1.$$

Исключаем вторую переменную из целевой функции.

$$f = x_1(b - 2x_1) = bx_1 - 2x_1^2.$$

Находим производную функции одной переменной f'_{x_1}, приравниваем ее нулю и находим критические точки.

$$f' = b - 4x_1;\ f' = 0 \Rightarrow 4x_1 = b \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{b}{4}; \bar{x}_2 = \frac{b}{2}$$

Знак второй производной $f''(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ отрицательный, значит мы действительно нашли значения аргументов, при котором целевая функция достигает максимального значения и точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ является решением задачи.

$$\bar{x}_1 = \frac{b}{4}; \bar{x}_2 = \frac{b}{2}; \bar{\lambda} = \frac{b}{4};\ f(\bar{x}) = \frac{b^2}{8} \quad f'' = -4 < 0 \Rightarrow f_{\max} = f\left(\frac{b}{4}; \frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{8}.$$

2. *С помощью условий Лагранжа*.

Находим градиенты целевой функции и функции ограничения:

$$\nabla f = (x_2, x_1); \nabla f_1 = (2,1).$$

Записываем условие их коллинеарности:

$$\frac{x_2}{2} = \frac{x_1}{1}.$$

Тогда $x_2 = 2x_1$ и, окончательно (см. рис. 3):

$$\bar{x}_1 = \frac{b}{4}; \bar{x}_2 = \frac{b}{2}; \bar{\lambda} = \frac{b}{4};\ f(\bar{x}) = \frac{b^2}{8}.$$

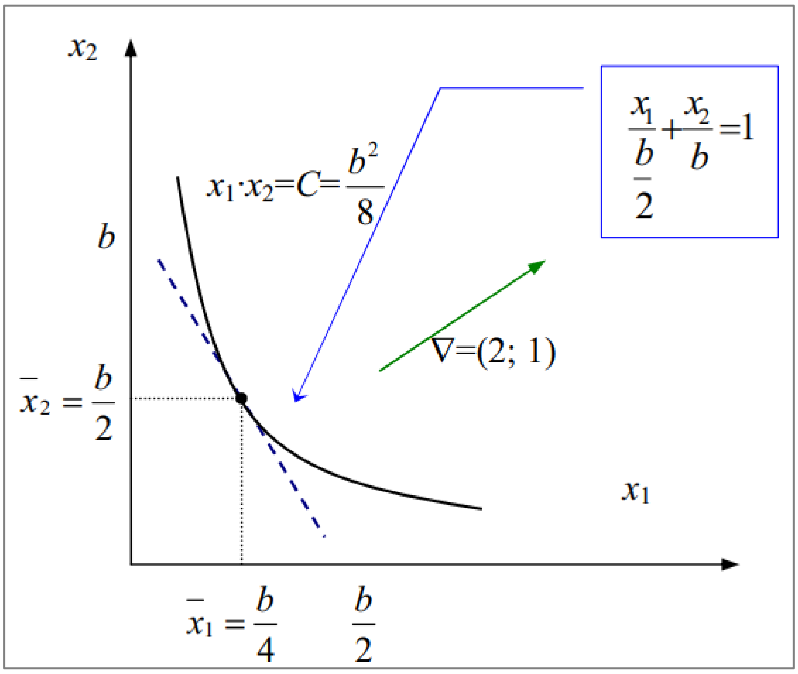

Рисунок 3 Иллюстрация условий Лагранжа

3. *Методом множителей Лагранжа.*

Записываем функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = x_1 \cdot x_2 + \lambda(b - 2x_1 - x_2).$$

Находим частные производные функции Лагранжа и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0\,(j = 1,2) \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = b - f_1(x) = 0 \end{cases}.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda = 0 & x_2 = 2\lambda, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda = 0 & x_1 = \lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - 2x_1 - x_2 = 0 & 2x_1 + x_2 = b \Rightarrow 4\lambda = b \Rightarrow \lambda = \dfrac{b}{4} \end{cases}.$$

Получили решение

$$\bar{x}_1 = \frac{b}{4}; \bar{x}_2 = \frac{b}{2}; \bar{\lambda} = \frac{b}{4}; f(\bar{x}) = \frac{b^2}{8}.$$

4 Решение экстремальной задачи в Wolfram Mathematica

Рассмотрим, например, нахождение решения задачи Дидоны.

Используем функцию **Maximize**, первым аргументом которой является список, состоящий из выражения для целевой функции и ограничения; вторым список переменных:

Пример задания выражения для целевой функции и ограничения, а также вызов процедуры максимизации представлен на рис. 4.

```
f = x1 x2;

f1 = 2 x1 + x2 == b;

sol = Maximize[{f, f1}, {x1, x2}]
        максимизировать
```

Рисунок 4 Фрагмент решения задачи

Результат решения представляет собой список, где первый элемент является максимальным найденным значением целевой функции, а второй представляет собой список правил для значений независимых переменных, обеспечивающих этот максимум.

$$\left\{\frac{b^2}{8},\left\{x_1\to\frac{b}{4},x_2\to\frac{b}{2}\right\}\right\}$$

Можно вывести только второй элемент списка $res = sol\left[\left[2\right]\right]$:

$$\left\{x_1\to\frac{b}{4},x_2\to\frac{b}{2}\right\}.$$

Кроме того, можно проверить, удовлетворяет ли решение условию, путем подстановки этого решения в первоначальную задачу $\{f, f_1\}\,/.res$:

$$\left\{\frac{b^2}{8},True\right\}.$$

Заключение

Сформулированные методологические основы и теория решения экстремальных задач методом Лагранжа позволяют выполнять комплексную формализацию, нахождение аналитического решения нелинейных задач условной оптимизации и поиск символьного решения в пакете компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

Библиографический список

1. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. Л.: ЛГУ, 1976. 184 с.
2. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов/Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ. 2002. 407 с.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 264 с.