УДК 539.376;517/519

Условие нестабильности обобщенной задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка при расчете антенно мачтовых сооружений

Андреевская Евгения Мировна
АО "Национальная башенная компания", Москва
к.т.н

Аннотация
Исследуется связь между возмущениями производных различных порядков в начальной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения при расчете антенно мачтовых сооружений. Найдены условия вырождения этой связи. Показана зависимость условия вырождения от параметров задачи и коэффициентов уравнения. Использована система символьной математики Maple.
Ключевые слова: задача Коши, возмущения производных, Maple, нелинейность

The instability condition for the generalized Cauchy problem of a second-order differential equation

Andreevskaya Evgenia Mirovna
National Tower Company, Moscow
Ph.D.

Abstract
The connection between perturbations of derivatives of various orders in the initial problem for a nonlinear ordinary differential equation for antenna's calculation is investigated. Conditions for the degeneracy of this connection are found. The dependence of the degeneracy condition on the parameters of the problem and the coefficients of the equation is shown. The system of symbolic mathematics Maple is used.
Keywords: Cauchy problem, perturbations of derivatives, Maple, nonlinearity

Многие механические, электромагнитные, волновые и другие процессы, связанные с колебанием антенно-мачтовым оборудованием, описываются дифференциальными уравнениями. Большинство из них нелинейные. В частности, колебание устройств радиоэлектронного оборудования под действием ветровой, сейсмической и др. нагрузки, имеет существенно нелинейный характер и описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. В практике при решении задач как правило используются линеаризация этих уравнений, вызванная непомерной трудностью нахождения решений нелинейных задач. Некоторые же особенности нелинейной задачи можно исследовать, не прибегая к решению уравнения. В виде самих уравнений уже заложены эти особенности. В [1-3] поставлена и решена задача теория стабильности дифференциальных уравнений. Решения практических задач подтвердило достоверность положений этой теории. В задачах выпучивания конструкций в условии ползучести [4-8], обработки металлов [9-11], заклинивании элементов пневматики [12] было установлено соответствие теории и эксперимента. В общем случае основные положения теории стабильности имеют приложения и для уравнений в частных производных [13]. Некоторые базовые прикладные и теоретические проблемы теории стабильности рассмотрены в [14,15].

В настоящей работе с точки зрения стабильности изучается дифференциальное уравнение второго порядка

$$ax_{tt} + bx_t^2 + x^3 = 0, \tag{1}$$

где производные обозначены нижним индексом $x = x(t),\ x_t = dx/dt,\ x_{tt} = d^2x/dt^2.$ Уравнение соответствует, например, некоторому динамическому процессу с силами вязкого сопротивления (зависимость от скорости) и нелинейными воздействиями (коэффициент x^3). Проварьируем уравнение, обозначив малые возмущения функции и ее производных $\Delta x,\ \Delta x_t,\ \Delta x_{tt}$:

$$a\Delta x_{tt} + 2bx_t\Delta x_t + 3x^2\Delta x = 0. \tag{2}$$

Дифференцируем это соотношение по времени t

$$a\Delta x_{ttt} + 2bx_{tt}\Delta x_t + 2bx_t\Delta x_{tt} + 3x^2\Delta x_t + 6xx_t\Delta x = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим влияние точности задания функции (нулевая производная) и третьей производных в обобщенной задаче Коши. По определению нестабильности порядка (0/3), величины скорости возмущения Δx и Δx_{ttt} задаются в начальных условия возмущенного процесса, описываемого уравнением (1). Для того, чтобы свести такую начальную задачу (обобщенную по [1]) к классической, необходимо из системы (2), (3) найти приращение производных Δx_t и Δx_{tt}. Запишем систему (2-3) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2bx_t & a \\ 2bx_{tt} + 3x^2 & 2bx_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta x_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

где k_1, k_2 линейно зависят от задаваемых возмущений Δx и Δx_{ttt}. Равенство нулю определителя матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2bx_t & a \\ 2bx_{tt} + 3x^2 & 2bx_t \end{bmatrix}$$

соответствует вырождению задачи и нестабильности процесса по отношению к возмущению соответствующих производных. Имеем следующее соотношение, связывающее функцию (положение) и ее скорость, соответствующие случаю вырождения связи:

$$\det A = 4b^2x_t^2 - 2abx_{tt} - 3ax^2 = 0.$$

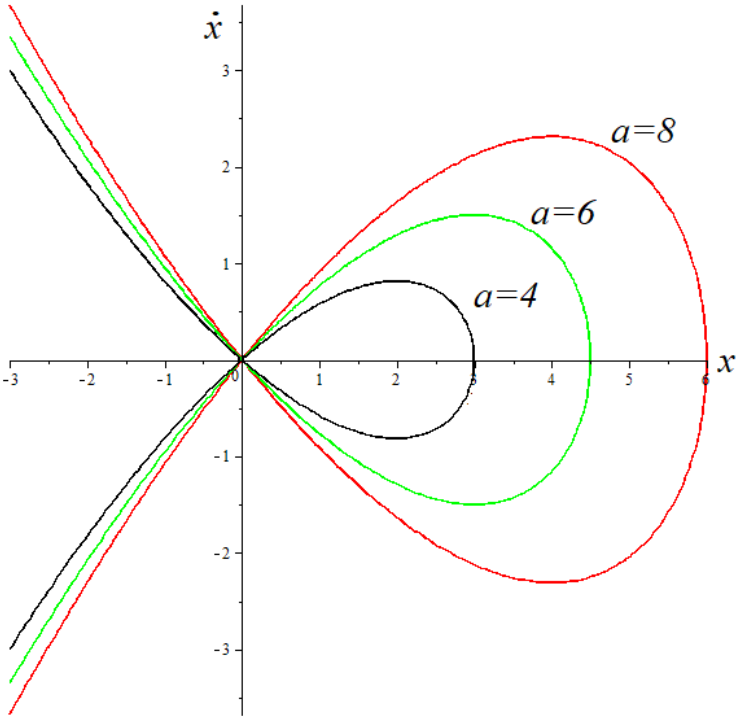

Рисунок 1 — Критические случаи при *b*=2

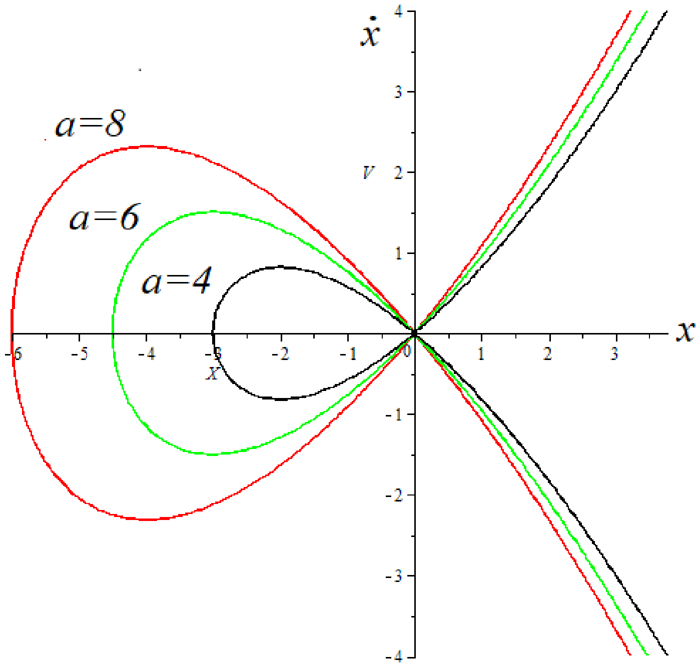

Рисунок 2 — Критические случаи при *b*=-2

В [16] исследована стабильность порядка (2/3) уравнения $ax_{tt}x_t + bx^2 = 0$. Получено условие $-bx^5/(ax_t^3) + x^2 = 0$, имеющее особенность при нулевой скорости. Нестабильность порядка (0/3) уравнения $ax_{tt} + bx_t + \sqrt{x} = 0$ изучена в [17]. Показано, что условие нестабильности зависит только от значения самой функции и не зависит от величины скорости: $a/(2\sqrt{x})-b^2=0$. Уравнение $ax_t^2+cx+bx_{tt}=0$ исследовано в [18] по отношению к возмущению функции и ее третьей производной по времени (порядок 0/3). Получено условие $4a^2x_t^2-b(2a(-(ax_t^2+x)/b)+c)=0$. Аналогичные задачи с применением системы компьютерной математики Maple [15,18-21] решены в [22-26].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 3-4 (7-8). С. 134-137.
2. Кирсанов М.Н. Точки нестабильности дифференциального уравнения // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 191-197.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики // Известия вузов. Строительство. 1996. №6. С. 39-44.
4. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Часть 1. Стержни: учебное пособие. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
5. Kirsanov M. N. Initial transgritical behavior in a compressed rod under creep conditions. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1993. Vol. 34. No. 2. Pp. 292–295.
6. Kirsanov M. N. Effect of the choice of the instability criterion in creep on the solution of the rod structure optimization problem // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1992. Vol. 33. No.4. Pp. 573-576.
7. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. 1997. Vol. 5. No.3. Pp. 221–227.
8. Kirsanov M. N. Buckling of a ductile column under rigid loading. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. July 1994. Vol. 35. No.4. Pp. 634-638.
9. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сарилов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 282 с.
10. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сарилов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 278 с.
11. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
12. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. №10. С. 37-40.
13. Кирсанов М.Н. Нестабильность распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166–169.

14. Кирсанов М.Н. Прикладные и теоретические проблемы теории стабильности // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016.4. С. 136-144.
15. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
16. Показаньев И.Д. Стабильность и численное решение одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 285-288.
17. Ерзунов И.А. Условие стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple //Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 221-223.
18. Бойко О.О. Анализ стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 202-204.
19. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
20. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
21. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011. 800 с.
22. Китаев С.С. Пример нестабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С.232 -235.
23. Кирсанов М.Н. Эволюция кривых нестабильности напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Вестник ЧГПУ, Механика предельного состояния. 2012, 2, С. 124–128.
24. Кирсанов М.Н. Точки нестабильности дифференциального уравнения // Вестник ЧГПУ, Механика предельного состояния. 2010, 2(8). С. 191–197
25. Бадертдинов Р.Р. О стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 194-197.
26. Евстигнеев Д.Е. Исследование стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 218–223.