

**Анализ прогиба внешне статически неопределимой решетчатой рамы,
допускающей геометрическую изменяемость**

Белянкин Никита Андреевич
НИУ «МЭИ»
Студент

Бойко Андрей Юрьевич
НИУ «МЭИ»
Студент

Плясова Анна Алексеевна
РХТУ им. Д.И.Менделеева
Студент

Аннотация

Решетчатая рама имеет четыре опоры стержневого типа. Нагрузка приложена равномерно по узлам верхнего пояса. Выводится зависимость величины прогиба рамы от числа панелей в ригеле при фиксированном числе панелей по вертикали. Для решения задачи используется система компьютерной математики Maple. Индуктивным методом получено обобщение ряда частных решений на произвольный случай. При вычислении прогиба применяется формула Максвелла-Мора. При некоторых значениях числа панелей замечен случай вырождения определителя уравнений равновесия.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

**Analysis of the deflection of externally statically indeterminate lattice frame,
allowing for geometric variability**

Belyankin Nikita Andreevich
NRU «MPEI»
Student

Boyko Andrey Yurievich
NRU «MPEI»
Student

Plyasova Anna Alexeevna
MUCTR
Student

Abstract

The lattice frame has four rod-type supports. The load is applied evenly over the nodes of the upper belt. The dependence of the deflection of the frame on the number of panels in the crossbar at a fixed number of panels vertically is obtained. To solve the problem, the Maple computer mathematics system is used. An inductive method is used to generalize a number of particular solutions to an arbitrary case. When calculating the deflection, the Maxwell-Mohr formula is used. For some values of the number of panels, the case of degeneration of the determinant of the equilibrium equations is observed.

Keywords: truss, Maxwell -Mohr's integral, deflection, induction, Maple

The truss grating with height $mh+h$ (Fig. 1) with span consisting of $2n$ panels of length a is loaded along the upper girder belt. Four pillars make the structure is externally statically indeterminate. Reactions of supports in such systems (if it is, of course, not a composite frame with one articulating hinge) can be found either from the General system of equilibrium equations of all nodes, or on the principle of possible displacements. The first method is preferable, since to determine the deflection it is still necessary to make the equilibrium equations of all nodes and determine the forces in all rods. Here the task is not only to find the deflection, but also to display the analytical (formula) dependence of the deflection of the structure on the number of panels. This is necessary, firstly, to expand the scope of the solution, and secondly, to analyze it. To calculate the forces, we apply the program [1]. Previously, this program was used in some analytical calculations of arch [2-9], spindle [10-13], spatial trusses [14-18] and multi-lattice trusses [19-26].

In the truss under consideration with n panels in half of the span the number of rods — $N_s = 8n + 8m + 20$, including four rods modeling supports. These rods are assumed to be non-deformable and are not included in the deflection calculation. For farm nodes, equilibrium equations in projections on the coordinate axis [2-8] are compiled.

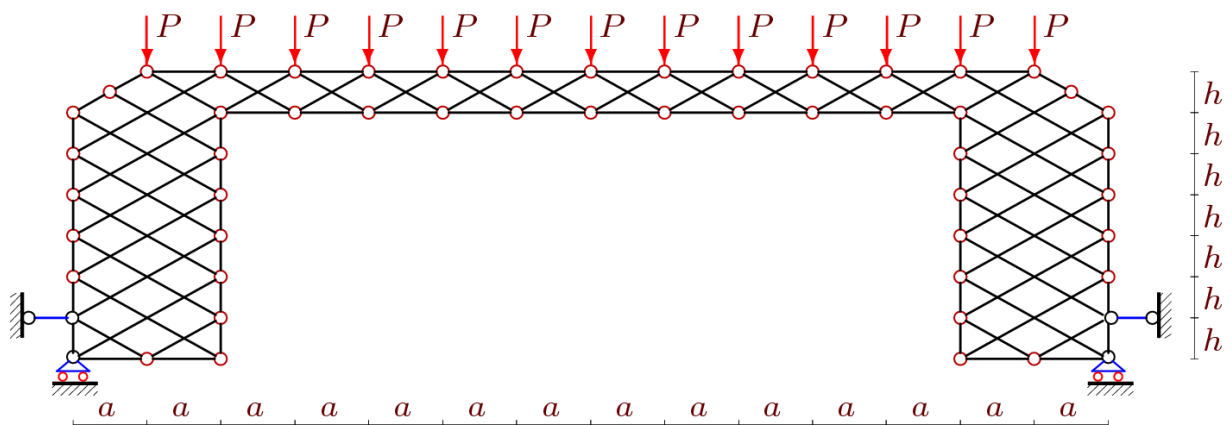


Figure 1- Truss at $n=5, m=6$

The program must enter the coordinates of the nodes and the order of connection of nodes and rods. Nodes and rods are numbered (Fig. 2).

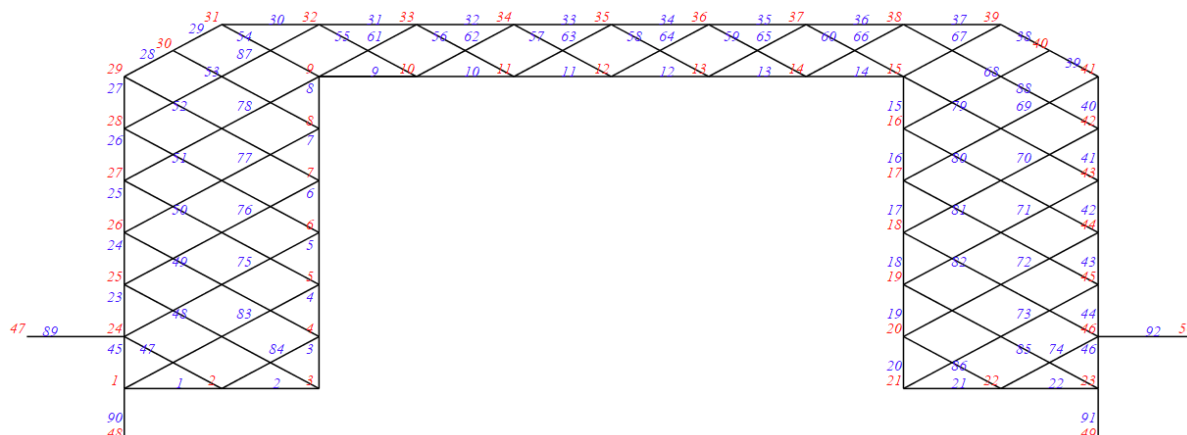


Figure 2 - Numbering of nodes and rods at $n=3, m=6$

The fragment of the program of input of coordinates of nodes in language of system of symbol mathematics Maple has the form

```
> for i to 3 do
  x[i]:=a*i-a; y[i]:=0;
> x[i+2+2*n+2*m]:=2*n*a+a*i*a; y[i+2+2*n+2*m]:=0;
> end:
> for i to m do
> x[i+3]:=2*a; y[i+3]:=h*i;
> x[i+2+2*n+m]:=2*a+2*n*a; y[i+2+2*n+m]:=m*h-h*i+h;
> x[i+5+2*n+2*m]:=0; y[i+5+2*n+2*m]:=h*i;
> x[i+3*m+4*n+10]:=2*n*a+4*a; y[i+3*m+4*n+10]:=m*h+h-h*i;
> end:
> for i to 2*n-1 do
  x[i+3+m]:=a*i+2*a; y[i+3+m]:=h*m; od:
> x[3*m+2*n+6]:=a/2; y[3*m+2*n+6]:=h/2+m*h:
> for i to 2*n+3 do
> x[i+3*m+2*n+6]:=a*i; y[i+3*m+2*n+6]:=h*m+h; od:
> x[3*m+4*n+10]:=x[3*m+4*n+9]+a/2; y[3*m+4*n+10]:=m*h+h/2:
```

The order of connections of nodes and rods is introduced by operators with special vectors containing numbers of the ends of the corresponding rod (by analogy with the task of a flat graph in discrete mathematics). The solution of the system of linear equations in symbolic form (the operators of the system of symbolic mathematics Maple [1]) gives expressions for the forces in all rods. To calculate the deflection, the Mohr's integral is used in the form of:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Denoted: EF — the rigidity of the rods, $S_i^{(P)}$ — the forces in the rods of the truss from a given load, l_i — the length of the rods, $S_i^{(1)}$ — the force from a single

force applied at the middle node of the lower belt. The total load in the considered problem is equal $P_s = P(2n - 1)$.

It is noticed that for *odd values of m* the determinant of the equilibrium equations system turns to zero. We calculate at $m=6$ and $n=3$. Induction on 22 farms gives the formula for the deflection of the form:

$$\Delta = P(a^3 A_n + c^3 C_n + h^3 H_n) / (4h^2 EF). \quad (1)$$

Upon detection of a General member of the sequence of coefficients a^3 needed to perform the 22 expressions of deflection and to obtain the next natural number: 176, -208, 288, -96, 360, 1376, 1080, 5920, 3776, 15888, 10416, 34272, 23608, 64704, 46600, 111456, 83280, 179440, 138176, 274208, 216456, 401952. It is difficult to find a common term of this sequence by conventional methods. The **rgf_findrecur** operator of the **genfunc** package of the Maple system for the sequence members can obtain a linear homogeneous recurrence equation of the ninth order:

$$A_n = A_{n-1} + 4A_{n-2} - 4A_{n-3} - 6A_{n-4} + 6A_{n-5} + 4A_{n-6} - 4A_{n-7} - A_{n-8} + A_{n-9}.$$

The **rsolve** operator finds the solution of the equation that sets the desired formula for the coefficient at a^3

$$A_n = (10n^4 + (-30 + 44(-1)^n)n^3 + (-46 - 102(-1)^n)n^2 + (153 - 521(-1)^n)n - 291(-1)^n + 99) / 6$$

Similarly, in the analysis of numerical series 198, -111, 342, -155, 494, -191, 654, -219, 822, -239, 998, -251, 1182, -255, 1374, -251, 1574, -239, 1782, -219, 1998, -191, we find that the coefficient C_k satisfies a homogeneous equation of the fifth order $C_n = C_{n-1} + 2C_{n-2} - 2C_{n-3} - C_{n-4} + C_{n-5}$ and has the form

$$C_n = n^2 + (20 - 48(-1)^n)n - 94(-1)^n + 35.$$

In turn, for the coefficient H_n of the numerical series: 158, 0, 290, -24, 422, -48, 554, -72, 686, -96, 818, -120, 950, -144, 1082, -168, 1214, -192, 1346, -216, 1478, -240 the following homogeneous equation of the fourth order is obtained: $H_n = 2H_{n-2} - H_{n-4}$, and its solution has the form:

$$H_n = (27 - 39(-1)^n)n - 34(-1)^n + 58.$$

The curves in figure 3 is constructed according to the formula (1) for the dimensionless relative deflection $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$, $P_s = P(2n + 3)$ at a span length of $L=100$ m. The length of a panel depends on the span: $a=L/(2n)$.

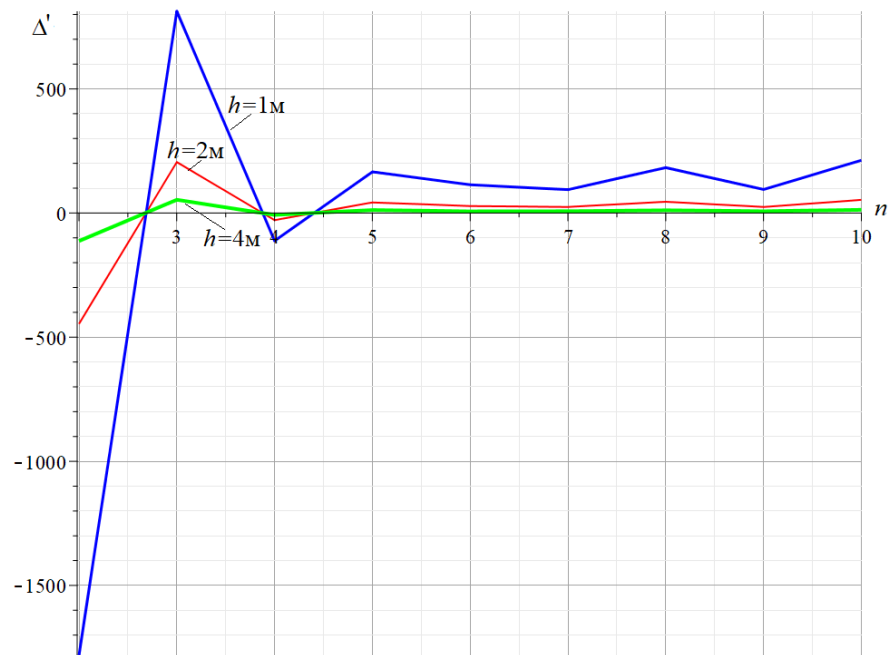
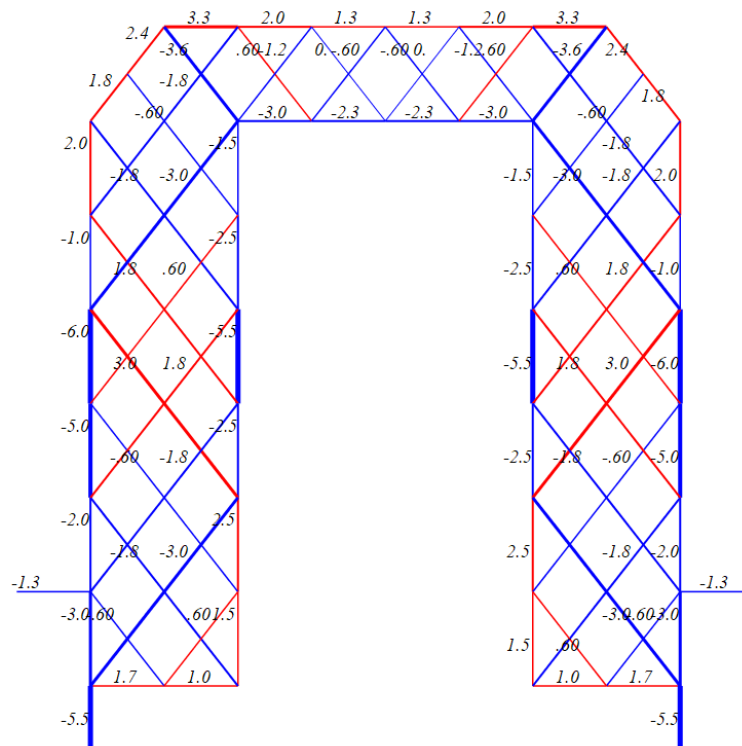


Figure 3 - dependence of deflection on the number of panels

It is interesting to note that at $n=2$ the middle point of the frame under load does not fall, as one would expect, but rises.

As you can see, with increasing the height of the truss and $n > 5$ the number of panels does not affect the amount of deflection in such a setting.

The graphical tools also allow Maple to give a clear picture of the distribution of stresses in the bars of the frame. In figure 4, stretched bars are highlighted in red, compressed bars are highlighted in blue. The thickness of the lines is proportional to the relative forces S_i / P whose values are specified. It is interesting to note that the most compressed rods were in the middle of the supporting parts of the truss on the outside, and the most stretched are located in the upper belt, which never happens with such loads in beam trusses.

Figure 4 - Force distribution, $a=2\text{m}$, $h=3\text{m}$

The method of induction and the program of calculation of forces in the Maple language was also used in the calculation of the cable – stayed system [27], the planar frame [28, 29], the frame of the ship modeled by the truss [30], the tower structure [31], the broken truss [32].

A review of some similar works using the program [1] in the problems of planar trusses deflection is performed in [5, 34, 35].

The formula for the deflection of the considered frame at $m=4$ and the loading of the lower belt is obtained by the authors in [36].

References

1. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Изд. дом МЭИ, 2011. 208 с.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. 4 (67). С. 86-94. doi: 10.18720/CUBS.67.7
3. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
4. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Pp.64-70. doi:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
5. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С. 12-33.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика

- инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50–55
7. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
 8. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12.
 9. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
 10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14(2). С. 90-95.
 11. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
 12. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13
 13. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. №2(15). С. 11-14.
 14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
 15. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
 16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
 17. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
 18. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С.19-22.
 19. Kirsanov M. N. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 28-32.
 20. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111
 21. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. №4(279). С.10-14.

22. Kirsanov M.N. Installation diagram of the lattice truss with an arbitrary number of panel // Magazine of Civil Engineering. 2018. 81(5). Pp. 175–183. doi: 10.18720/MCE.81.17.
23. Kirsanov M. N. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 28-32.
24. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 33-41.
25. Kirsanov M. N., Tinkov D.V. Analytical calculation of the deflection of the lattice truss // MATEC Web of Conferences. Vol. 193., 03015 (2018) doi.org/10.1051/matecconf/201819303015.
26. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе решетчатой фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. №4(48). С. 83-89.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33
28. Kirsanov M. N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 67-71.
29. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
30. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой / М. Н. Кирсанов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
31. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
32. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
33. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вращенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
34. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73. doi: 10.5862/MCE.57.6
35. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
36. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Формулы для расчета прогиба внешне статически неопределимой решетчатой рамы // Постулат. 2018. №10.