

Формулы для расчета прогиба внешне статически неопределимой решетчатой рамы

Белянкин Никита Андреевич

НИУ «МЭИ»

Студент

Бойко Андрей Юрьевич

НИУ «МЭИ»

Студент

Плясова Анна Алексеевна

РХТУ им. Д.И.Менделеева

Студент

Аннотация

Плоская решетчатая П-образная ферма с четырьмя опорными стержнями загружается по нижнему поясу ригеля. Выводится функция величины прогиба рамы от числа панелей. Для решения задачи применяются специальные операторы системы Maple и метод вырезания узлов. Индуктивный метод позволяет обобщить ряд частных решений на произвольное число панелей. Число панелей по высоте фермы при этом фиксировано. Применяется интеграл Мора. Отмечается случай вырождения определителя уравнений равновесия при некоторых значениях числа панелей.

Ключевые слова: ферма, интеграл Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

Formulas for calculating the deflection of externally statically indefinable lattice frame

Belyankin Nikita Andreevich

NRU «MPEI»

Student

Boyko Andrey Yurievich

NRU «MPEI»

Student

Plyasova Anna Alexeevna

MUCTR

Student

Abstract

A planar lattice U-shaped truss with four support rods is loaded on the lower girder belt. The function of the deflection of the frame of the number of panels is obtained. To solve the problem, special operators of the Maple system and the method of cutting nodes are used. The inductive method allows one to generalize a series of particular solutions to an arbitrary number of panels. The number of panels along the height of the truss is fixed. The Mohr's integral is used. The case of degeneration of the determinant of equilibrium equations is noted for some values of the number of panels.

Keywords: truss, Maxwell -Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Решетка фермы высотой $mh+h$ (рис 1) с пролетом, состоящим из $2n$ панелей длиной a , нагружена по нижнему поясу ригеля. Четыре опоры делают конструкцию внешне статически неопределимой. Реакции опор в таких системах (если это, конечно, не составная рама с одним сочленяющим шарниром) можно найти либо из общей системы уравнений равновесия всех узлов, либо по принципу возможных перемещений. Предпочтительней первый способ, так как для определения прогиба все равно необходимо составлять уравнения равновесия всех узлов и определять усилия во всех стержнях. Здесь ставится задача не только найти прогиб, но и вывести аналитическую (формульную) зависимости прогиба конструкции от числа панелей. Это необходимо, во-первых, для расширения области применимости решения, во-вторых, для его анализа. Для расчета усилий применим программу [1]. Ранее эта программа использовалась в некоторых аналитических расчетах арочных [2-9], шпренгельных [10-13], пространственных ферм [14-18] и многорешетчатых фермах [19-26].

В рассматриваемой ферме с n панелями в половине пролета число стержней $-N_s = 8n + 8m + 14$, включая четыре стержня, моделирующие опоры. Эти стержни предполагаются недеформируемыми и в расчет прогиба не входят. Для узлов фермы составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат [1-9].

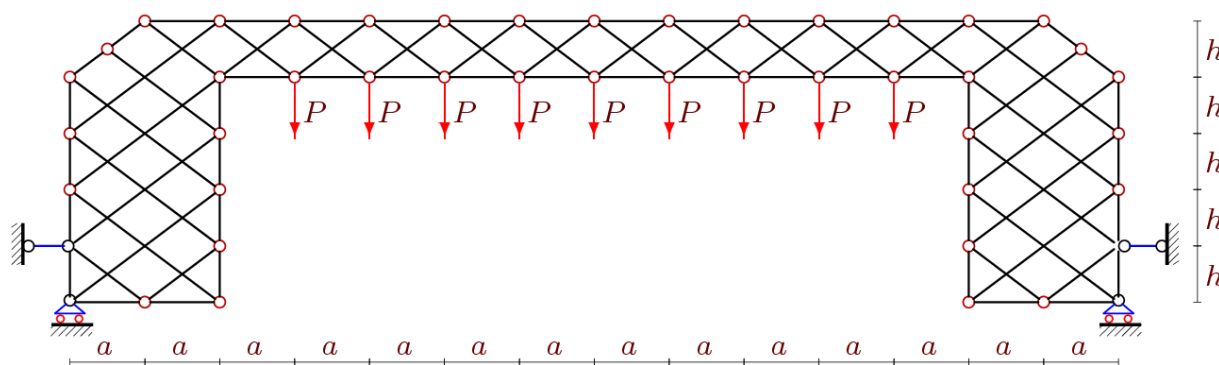


Рисунок 1 - Ферма при $n=5$, $m=4$

В программу необходимо ввести координаты узлов и порядок соединения узлов и стержней. Узлы и стержни нумеруются (рис. 2).

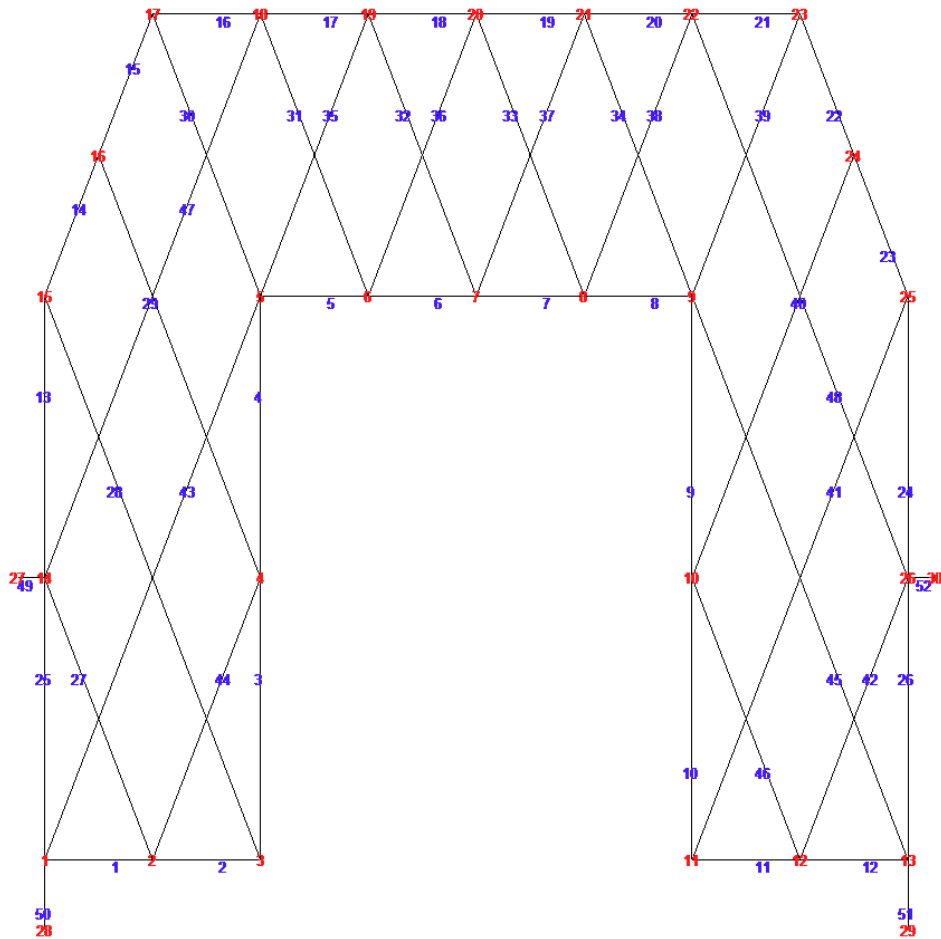


Рисунок 2 - Нумерация узлов и стержней при $n = m = 2$

Фрагмент программы ввода координат узлов на языке системы символьной математики Maple имеет вид

```
> for i to 3 do
  x[i]:=a*i-a; y[i]:=0;
> x[i+2+2*n+2*m]:=2*n*a+a+i*a; y[i+2+2*n+2*m]:=0;
> end:
> for i to m do
> x[i+3]:=2*a; y[i+3]:=h*i;
> x[i+2+2*n+m]:=2*a+2*n*a; y[i+2+2*n+m]:=m*h-h*i+h;
> x[i+5+2*n+2*m]:=0; y[i+5+2*n+2*m]:=h*i;
> x[i+3*m+4*n+10]:=2*n*a+4*a; y[i+3*m+4*n+10]:=m*h+h-h*i;
> end:
> for i to 2*n-1 do x[i+3+m]:=a*i+2*a; y[i+3+m]:=h*m; end:
> x[3*m+2*n+6]:=a/2; y[3*m+2*n+6]:=h/2+m*h:
> for i to 2*n+3 do x[i+3*m+2*n+6]:=a*i; y[i+3*m+2*n+6]:=h*m+h;
end:
> x[3*m+4*n+10]:=x[3*m+4*n+9]+a/2; y[3*m+4*n+10]:=m*h+h/2:
```

Порядок соединений узлов и стержней вводится операторами специальными векторами, содержащими номера концов соответствующего стержня (по аналогии с заданием плоского графа в дискретной математике). Решение системы линейных уравнений в символьной форме (задействованы операторы системы символьной математики Maple [1]) дает выражения для усилий во всех стержнях. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено: EF — жесткость стержней, $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях фермы от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса. Суммарная нагрузка в рассматриваемой задаче равняется $P_s = P(2n-1)$.

Замечено, что при некоторых значениях n определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль. Исключая эти величины, произведем расчет при $m=4$ и $n = (6k + 5 - (-1)^k) / 4k = 1, 2$. Индукция по 22 фермам дает формулу для прогиба вида:

$$\Delta = P(a^3 A_n + c^3 C_n + h^3 H_n) / (2h^2 EF). \quad (1)$$

При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 22 выражения прогиба и получить следующие натуральные числа: 108, 222, 1256, 1346, 4504, 4334, 11204, 10474, 23028, 21374, 41968, 38962, 70336, 65486, 110764, 103514, 166204, 155934, 239928, 225954, 335528, 317102. Найти общий член этой последовательности обычными методами затруднительно. Оператором *rgf_findrecur* пакета *genfunc* системы Maple для членов последовательности можно получить линейное однородное рекуррентное уравнение девятого порядка:

$$A_n = A_{n-1} + 4A_{n-2} - 4A_{n-3} - 6A_{n-4} + 6A_{n-5} + 4A_{n-6} - 4A_{n-7} - A_{n-8} + A_{n-9}.$$

Оператор *rsolve* находит решение уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3

$$A_n = (10n^4 + (150 - 28(-1)^n)n^3 + (650 - 318(-1)^n)n^2 + (219 - 166(-1)^n)n + 45(-1)^n - 117) / 12.$$

Аналогично, при анализе численного ряда 95, 68, 343, 150, 595, 236, 851, 326, 1111, 420, 1375, 518, 1643, 620, 1915, 726, 2191, 836, 2471, 950, 2755, 1068, находим, что коэффициент C_k удовлетворяет однородному уравнению пятого порядка $C_n = C_{n-1} + 2C_{n-2} - 2C_{n-3} - C_{n-4} + C_{n-5}$ и имеет вид

$$C_n = (2n^2 + (320 - 168(-1)^n)n + 35(-1)^n - 75) / 4.$$

В свою очередь, для коэффициента H_n из числового ряда: 85, 72, 315, 156, 545, 240, 775, 324, 1005, 408, 1235, 492, 1465, 576, 1695, 660, 1925, 744,

2155, 828, 2385, 912 получено следующее однородное уравнение четвертого порядка: $H_n = 2H_{n-2} - H_{n-4}$, а его решение имеет вид:

$$H_n = \left((157 - 73(-1)^n)n + 18(-1)^n - 42 \right) / 2.$$

Кривые на рисунке 3 построены по формуле (1) для безразмерного относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$ при длине пролета $L=100$ м. Длина панели a зависит от пролета: $a=L/(2n)$. Высота h указана в метрах.

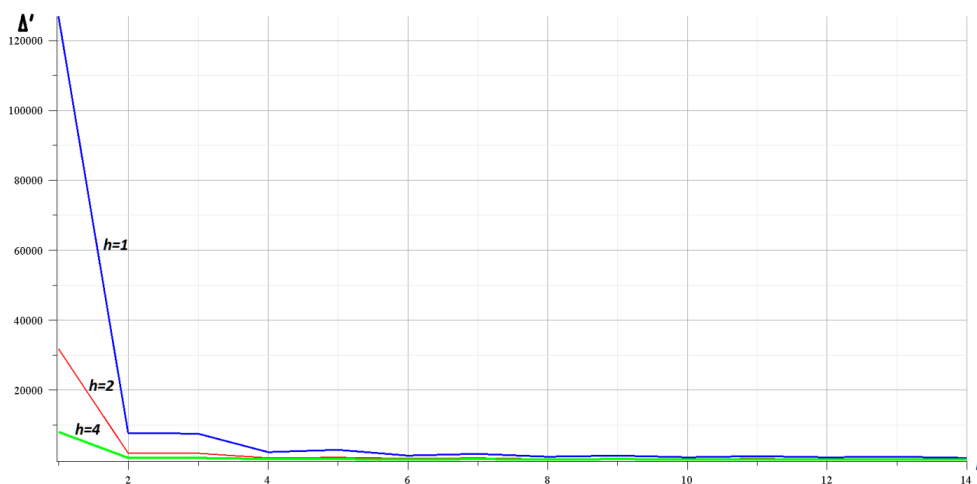


Рисунок 3 - Зависимость прогиба от числа панелей

Как можно заметить, при $n > 8$ число панелей почти не влияет на величину прогиба в такой постановке. С увеличением высоты фермы прогиб резко уменьшается.

Метод индукции и программа расчета усилий на языке Maple также использовалась при расчете вантовой системы [27], плоской рамы [28,29], шпангоута корабля, моделируемого фермой [30], башенной конструкции [31], вваренной фермы [32].

Обзор некоторых аналогичных работ, использующих программу [1] в задачах о прогибе плоских ферм, выполнен в [5, 34,35].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maplelet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. №4 (67). С. 86-94. doi: 10.18720/CUBS.67.7
3. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
4. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т.14. №1. С.64-70. doi:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70

5. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С. 12-33.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50–55
7. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
8. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14(2). С. 90-95.
11. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
12. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13
13. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. №2(15). С. 11-14.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
15. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. №. 08. С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
17. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. №. 4. С. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
18. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С.19-22.
19. Kirsanov M. N. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 28-32.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. No 2. С. 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-

2018-14-2-105-111

21. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. №4(279). С.10-14.
22. Kirsanov M.N. Installation diagram of the lattice truss with an arbitrary number of panel // Magazine of Civil Engineering. 2018. 81(5). Pp. 175–183. doi: 10.18720/MCE.81.17.
23. Kirsanov M. N. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 28-32.
24. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 33-41.
25. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. №2 (15). С. 15-19.
26. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе решетчатой фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. №4(48). С. 83-89.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33
28. Kirsanov M. N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 67-71.
29. Широков А.С. Вывод формулы для прогиба статически определимой порталной фермы в зависимости от числа панелей // Молодежь и наука. 2018. №5. С.119.
30. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой / М. Н. Кирсанов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
31. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
32. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
33. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вращенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
34. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
35. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73. doi: 10.5862/MCE.57.6