

**Аналитическое решение задачи о прогибе фермы типа Больмана***Салимов Максим Сергеевич**НИУ «МЭИ»**Студент***Аннотация**

Ферма балочного типа имеет решетку, в которой узлы нижнего пояса соединены только с узлами верхнего пояса и не соединены между собой. Поставлена задача получения зависимости прогиба фермы от числа панелей при нагружении ее сосредоточенной силой. Предполагается, что стержни фермы работают в упругой области, жесткость всех стержней одинаковая, а узлы фермы являются идеальными шарнирами. Ряд отдельных решений для ферм с различным числом панелей методом индукции обобщается на произвольный случай. Вычисление усилий и все преобразования выполнены в системе символьной математики Maple. Для определения прогиба применяется формула Максвелла-Мора.

**Ключевые слова:** ферма Больмана, формула Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

**Analytical solution of the deflection problem of a Bolman type truss***Salimov Maksim Sergeevich**NRU «MPEI»**Student***Abstract**

The girder-type truss has a grid in which the nodes of the lower belt are connected only with the nodes of the upper belt and are not interconnected. The task is to obtain the dependence of the deflection of the truss on the number of panels under loading with a concentrated force. It is assumed that the rods of the truss work in an elastic region, the rigidity of all the rods is the same, and the truss nodes are ideal hinges. A number of individual solutions for trusses with different numbers of panels by the induction method are generalized to an arbitrary case. Effort calculations and all transformations are performed in the Maple symbolic mathematics system. To determine the deflection, the Maxwell-Mohr's formula is used.

**Keywords:** Bolman truss, Maxwell –Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Фермы типа Финка или Больмана [1-6] как правило, нагружаются по узлам прямолинейного пояса, что моделирует, например, транспортную нагрузку на мост. Рассмотрим вариант фермы с раскосами двух типоразмеров и стойками (рис. 1). Ферма статически определимая, регулярная. К ней

применим индуктивный метод получения решения, ранее примененный для фермы с решеткой «Star» [7], решеткой «Butterfly» [8], плоских решетчатых ферм [9-19], ферм арочного типа [20-25] и пространственных ферм [26-34]. Метод индукции применялся и для расчета ножничных механизмов [35,36].

В ферме  $n$  ячеек периодичности (условных панелей), каждая из которых состоит из стойки, четырех раскосов и стержней верхнего пояса. Всего в ферме  $n_s = 8n + 4$  стержней, включая три опорные. Рассмотрим случай симметричной фермы с нечетным числом панелей  $n=2k-1$ .

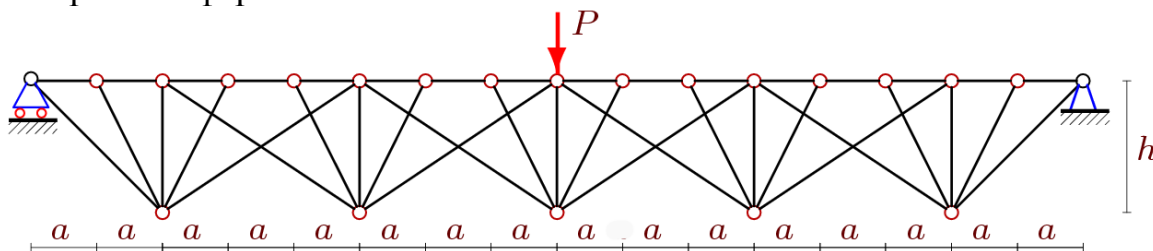


Рисунок 1— Ферма под нагрузкой,  $n = 5$

Расчет усилий в стержнях ведется в программе, написанной на языке системы символьной математики Maple [37]. Узлы и стержни нумеруются (рис. 2).

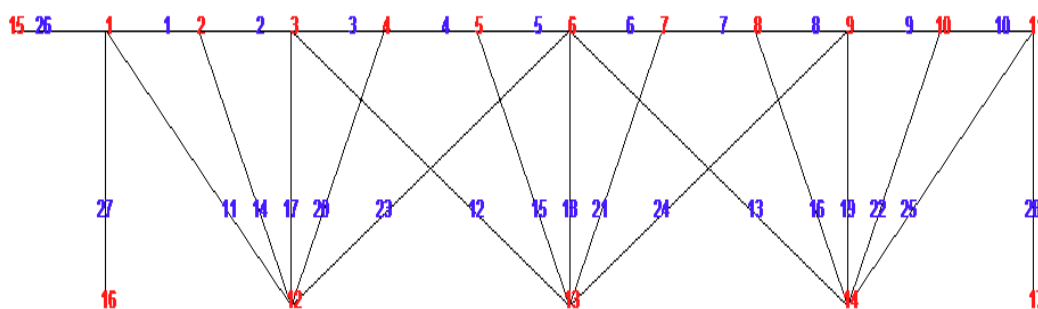


Рисунок 2— Номера стержней и узлов,  $n = 3$

В программу вводятся координаты узлов. Начало координат в узле 1. Все данные записываются в циклах. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to 3*n+2 do   x[i]:=a*i-a: y[i]:=h: end:
> for i to n do
>   x[i+3*n+2]:=3*a*i-a:   y[i+3*n+2]:=0:
> end:
```

Данные о соединении стержней (номера концов стержней) записываются в специальные векторы  $\mathbf{n}$ . Верхний пояс кодируется векторами:

```
> for i to 3*n+1 do
>   N[i]:=[i,i+1];
> end:
```

Для решетки используются векторы:

```
> for i to n do
> N[i+3*n+1] := [3*i-3, i+3*n+2];
> N[i+4*n+1] := [3*i-1, i+3*n+2];
> N[i+5*n+1] := [3*i, i+3*n+2];
> N[i+6*n+1] := [3*i+1, i+3*n+2];
> N[i+7*n+1] := [3*i+3, i+3*n+2];
> end:
> N[8*n+1] := [3*n+2, 4*n+2];
> N[3*n+2] := [3-2, 3*n+3];
```

Прогиб определяем по известной формуле Максвелла-Мора:

$$EF\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^2 l_i.$$

Обозначено:  $l_i$  — длина стержня  $i$ ,  $S_i$  — усилие от действия единичной силы,  $EF$  — жесткость стержней. Результаты вычислений показали, что форма решения для ферм с различным числом панелей не меняется:

$$EF\Delta_k = P \frac{A_k a^3 + D_k d^3 + F_k f^3 + H_k h^3}{36h^2}. \quad (1)$$

Остается только вычислить коэффициенты как функции числа панелей. Для коэффициента  $A_n$  по результатам расчетов получено рекуррентное уравнение

$$A_k = 4A_{k-1} - 6A_{k-2} + 4A_{k-3} - A_{k-4}$$

из которого имеем решение:

$$A_k = 648k^3 - 648k^2 + 54k + 90.$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты:

$$F_k = 12k^3 - 12k^2 + 10k - 10,$$

$$D_n = 9,$$

$$H_k = 24k^3 + 48k^2 + 44k + 34.$$

На рисунке 3 приведены кривые зависимости (1) относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (PL)$  от числа  $k$ , характеризующего число панелей при  $L=an=10$ м.

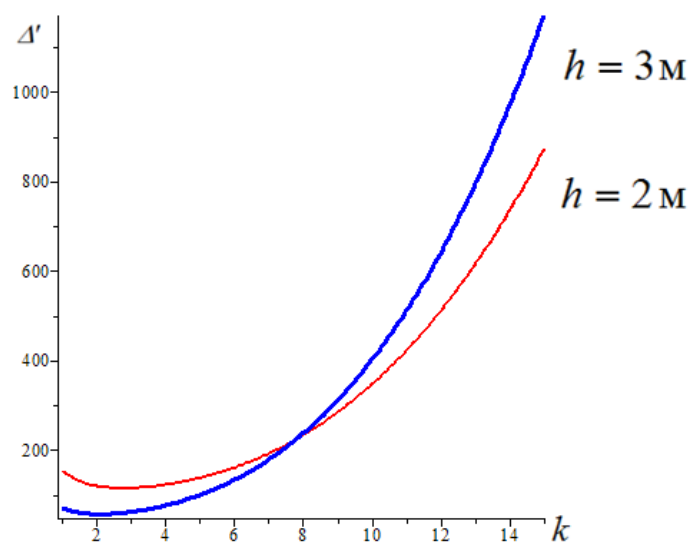


Рисунок 3 — Зависимость прогиба от числа панелей

Обзоры некоторых аналитических решений для плоских ферм с использованием метода индукции и системы Maple даны в [38-40]. Метод индукции в задачах вывода аналитических выражений для строительных конструкций. В [41-43] приведен другой подход, сочетающий численные и аналитические методы на базе системы Maple.

### Библиографический список

1. Gordon J. E. Structures, or why things don't fall down. Penguin Books, Harmondsworth, 1978.
2. Васильченко Д.И. Формула для смещения опоры балочной фермы типа Больмана//Научный альманах.2016. № 8-1(22). С. 261-263.
3. Васильков И.Д., Кирсанов М.Н. Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей//Научный альманах. 2016. № 11-2(25). С.289-292
4. Савиных А.С. Формула для расчета смещения подвижной опоры плоской статически определимой фермы//Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 46-49.
5. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей//Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 42-45.
6. Харик С.А. Индуктивный метод для расчета прогиба плоской статически определимой фермы, загруженной в середине пролета // Научный альманах. 2016. № 11-2(25). С. 332-334
7. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой «Star» в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.

9. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels// Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99
10. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
12. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
13. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме//Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа //Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
16. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
17. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16-19.
19. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 2. С. 122-125.
20. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
21. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
22. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
23. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
24. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
25. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.

26. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
28. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
29. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
31. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
32. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
33. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
34. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
35. Кийко Л.К., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет подъемника параллелограммного типа с произвольным числом секций // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. № 3. С. 48-53.
36. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет параллелограммного механизма с произвольным числом секций // Вестник машиностроения. 2018. № 1. С. 37-39.
37. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
38. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
39. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
40. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о

- прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
41. Матросов А.В. Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом // Журнал университета водных коммуникаций. 2012. № 1. С. 8-15.
42. Матросов А.В. Расчет гидротехнических сооружений численно-аналитическим методом // Журнал университета водных коммуникаций. 2010. № 4. С. 8-14.
43. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // В сборнике: 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 382-385.