УДК 004.891.3

Влияние вида импликатора на решение обратной задачи нечеткой диагностики

Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
д.т.н., заведующий кафедрой Информатики

Аннотация
Изложены теоретические и методологические аспекты решения реляционных уравнений для обратной задачи с нечеткими соответствиями. Исследуется влияние вида нечеткой импликации на решение задачи. Приведены примеры решения обратной задачи для нечетких соответствий, используемых в диагностических экспертных системах.
Ключевые слова: нечеткие данные, реляционное уравнение, обратные задачи

Influence of the form of the implicator on the solution of the inverse problem of fuzzy diagnostics

Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Abstract
Theoretical and methodological aspects of the solution of relational equations for the inverse problem with fuzzy correspondences are described. The influence of the form of fuzzy implication on the solution of the problem is investigated. Examples of solving the inverse problem for fuzzy correspondences used in diagnostic expert systems are given.
Keywords: fuzzy data, relational equation, inverse problems

Введение

Одной из ключевых и наиболее трудоемких проблем, возникающих при синтезе диагностических экспертных систем, способных выполнять функции систем поддержки принятия решений при нечетких исходных данных, является проблема решения обратной задачи для уравнений с нечеткими соответствиями.

Настоящее исследование базируется на работах [1, 2] и является продолжением исследований [3, 4, 5] в данном направлении.

1 Постановка задачи

Известно нечеткое бинарное соответствие $\tilde{R}(X,Y)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}} = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \frac{\mu_{\tilde{R}}(x,y)}{(x,y)},$$

значения которой определяют степени уверенности эксперта в том, что причина $x \in X$ приводит к следствию $y \in Y$.

Определены нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} = \sum_{\forall x\in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x};\ \tilde{B} = \sum_{\forall y\in Y} \frac{\mu_{\tilde{B}}(y)}{y},$$

в которых функции принадлежности представляют собой степени истинности причин и следствий.

Тогда нечеткое реляционное уравнение (левое) $\tilde{A} \circ \left(\tilde{A} \to \tilde{B}\right) = \tilde{A} \circ \tilde{R} = \tilde{B}$ в матричном представлении будет иметь вид:

$$X \circ R = Y. \quad (1)$$

Рассмотрим $\min - I$ композицию, где I – расширение стандартной логической операции импликации на единичном отрезке [1].

Требуется исследовать влияние вида импликаторов I на решение обратной задачи для нечетких реляционных уравнений вида (1).

2 Методика решения

Известно [1], что в стандартном варианте импликаторы могут быть индуцированы по схеме:

$$I = N\left(T\left(x, N(y)\right)\right),$$

где $N(a) = 1 - a$ – стандартный инвертор;

$T(a,b)$ – *t*-норма.

Используем в качестве *t*-нормы три наиболее распространённые:

- $M(a,b) = \min(a,b)$ – логическое произведение;
- $P(a,b) = a \cdot b$ – алгебраическое произведение;
- $W(a,b) = \max(a + b - 1, 0)$ – граничное произведение.

Тогда исследованию подлежат следующие индуцированные этими нормами импликаторы:

$$I_M = \max(1 - x, y);$$

$$I_P = 1 - x + x \cdot y;$$

$$I_w = \min(1 - x + y, 1).$$

На рисунке 1 представлены графики логического произведения и индуцированного на его основе импликатора I_M.

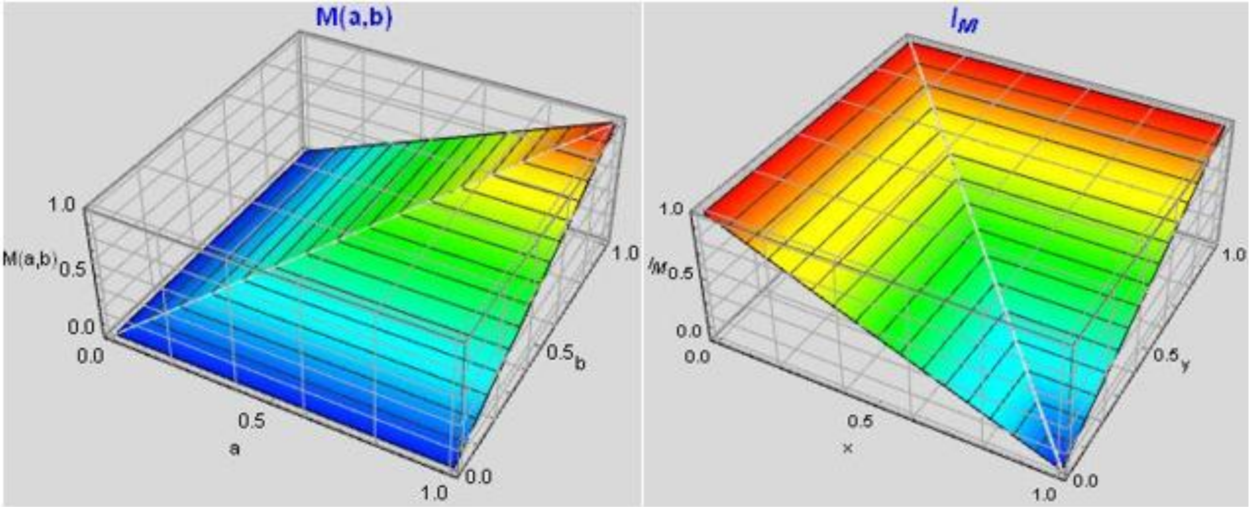

Рис. 1 Логическое произведение и индуцированный импликатор

На рисунке 2 представлены графики алгебраического произведения и индуцированного на его основе импликатора I_P.

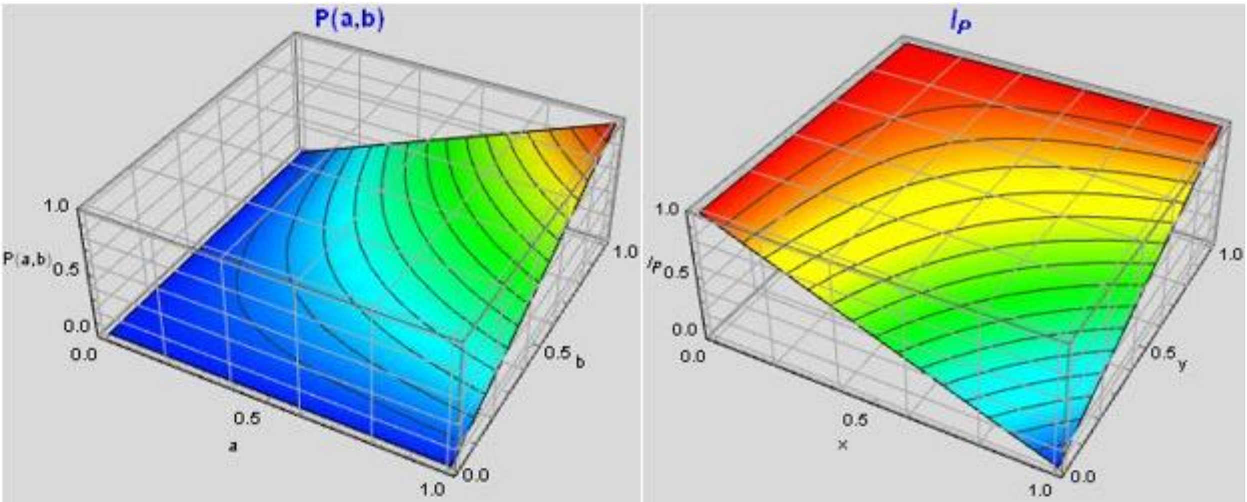

Рис. 2 Алгебраическое произведение и индуцированный импликатор

На рисунке 3 представлены графики граничного произведения и индуцированного на его основе импликатора I_W.

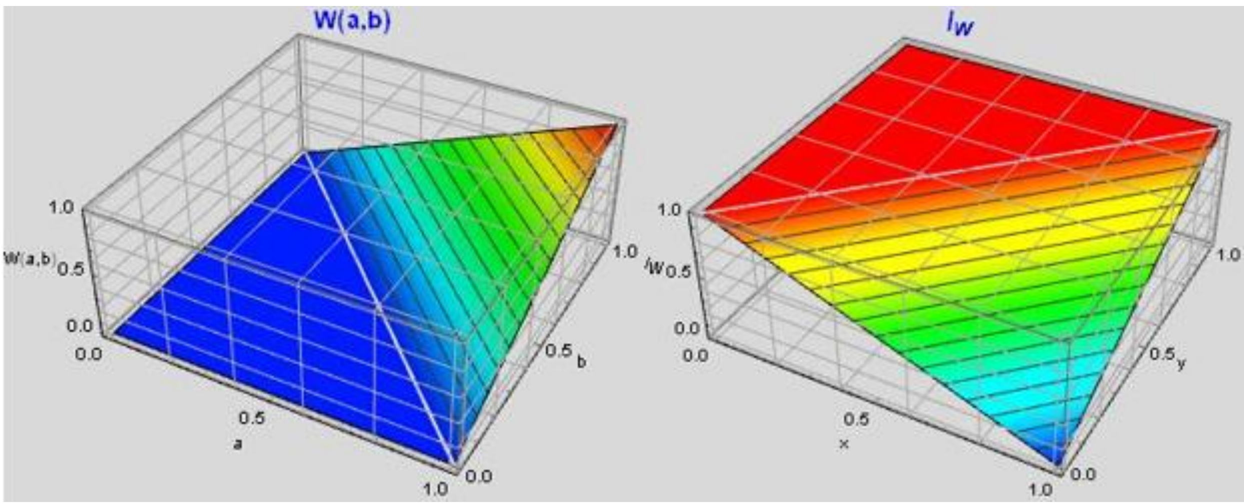

Рис. 3 Граничное произведение и индуцированный импликатор

3 Решение простейших нечетких уравнений

При $m=1, n=1$ уравнение (1) примет вид:

$$I(x,r)=y. \tag{2}$$

Утверждение 1. Для того, чтобы уравнение (2) имело решение x^0 необходимо и достаточно выполнение условия: $r \le y$.

Например, уравнение $I(x,0.8)=0.7$, не имеет решения.

Утверждение 2. Решение уравнений находится по формуле:

$$x^0=\begin{cases} \left[\begin{array}{l|l} [1-y,1] & r=y \\ 1-y & r<y \end{array}\right. & I=I_M(x,r) \\ \left[\begin{array}{l|l} [0,1] & r=y \\ \dfrac{1-y}{1-r} & r<y \end{array}\right. & I=I_P(x,r) \\ 1-y+r & I=I_W(x,r) \end{cases}.$$

В таблице 1 представлены варианты решений простейших нечетких уравнений при использовании трех наиболее распространённых импликаторов.

Таблица 1 Примеры решений уравнений с различными импликаторами

Импликатор	Уравнение		
	$I(x,0.7)=0.7$	$I(x,0.2)=0.7$	$I(x,0.1)=0.5$
$I_M=\max(1-x,r)$	$0.3\le x^0\le 1$	$x^0=0.3$	$x^0=0.5$
$I_P=1-x+x\cdot r$	$x^0=1$	$x^0=3/8$	$x^0=5/9$
$I_W=\min(1-x+r,1)$	$x^0=1$	$x^0=0.5$	$x^0=0.6$

4 Решение полиномиальных уравнений

Пусть $m>1; n=1$, тогда $X=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_m), R=(r_1\ r_2\ \cdots\ r_m)^T$ и уравнение (1) примет вид:

$$\min_i\left(I(x_i,r_i)\right)=y\left(i=\overline{1,m}\right). \tag{3}$$

Утверждение 3.

Для того, чтобы уравнение (3) имело решение $\left(x_1^0\ x_2^0\ \cdots\ x_m^0\right)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие.

$$\exists k(1\le k\le m): r_k \le y.$$

Необходимость $\left(\exists\left(x_1^0\ x_2^0\ \cdots\ x_m^0\right) \Rightarrow \exists k(1\le k\le m): r_k\le y\right)$:

Пусть $\begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \cdots & x_m^0 \end{pmatrix}$ – решение уравнения (3). Это значит, что найдется по крайней мере одно число $1 \le k \le m$ для которого выполняется равенство $I\left(x_k^0, r_k\right) = y$, а это значит, что $r_k \le y$ ☺.

Достаточность $\left(\exists k\left(1 \le k \le m\right): r_k \le y \Rightarrow \exists\left(x_1^0 \;\; x_2^0 \;\; \cdots \;\; x_m^0\right)\right)$:

Пусть $\exists k\left(1 \le k \le m\right): r_k \le y$. Тогда хотя бы одно из уравнений $I\left(x_k, r_k\right) = y$ имеет решение, следовательно для (3):

$$\min\left(I\left(x_i, r_i\right)\right) = \min\left(I\left(x_1, r_1\right) \ge y, I\left(x_2, r_2\right) \ge y, \ldots, I\left(x_k, r_k\right) = y, \ldots\right) = y.$$

Утверждение 4

Компоненты максимального решения уравнения определяются следующим образом:

$$\overline{x}_i^0 = \begin{cases} 1 & \left| \; r_i \ge y \right. \\ u & \left| \; r_i < y \right. \end{cases} \left(i = \overline{1, m}\right), \text{ где}$$

$$u = \begin{cases} 1 - y & \left| \; I_M\left(x_i, r_i\right) \right. \\ \dfrac{1 - y}{1 - r_i} & \left| \; I_P\left(x_i, r_i\right) \right. \\ 1 - y + r_i & \left| \; I_W\left(x_i, r_i\right) \right. \end{cases}.$$

Утверждение 5

Компоненты минимального решения уравнения определяются следующим образом:

$$\underline{x}_i^0\left(k\right) = \begin{cases} 0 & \left| \; r_i < y \right. \\ \left[\begin{array}{l|l} u & i = Q_k \\ 0 & i \ne Q_k \end{array}\right. \end{cases}; \left(i = \overline{1, m}; k = \overline{1, |Q|}\right),$$

где $Q = \left\{i : r_i \le y\left(i = \overline{1, m}\right)\right\}$ ☺.

Очевидно, если ни одно из простейших уравнений $I\left(x_i, r_i\right) = y\left(i = \overline{1, m}\right)$ не имеет решений, то и множество решений полиномиального уравнения пусто.

Пример. Рассмотрим нечеткое реляционное уравнение:

$$X \circ R = Y = \left(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4\right) \circ \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \left(0.7\right).$$

Используя min-*I* композицию получим уравнение:

$$\min_i\left(I\left(x_i, r_i\right)\right) = y\left(i = \overline{1, 4}\right). \qquad (4)$$

Очевидно, при различных используемых импликаторах I_M, I_P и I_W уравнение (4) преобразуется к одному из следующих:

$$\min\left(\max\left(1-x_1,0.2\right),\max\left(1-x_2,0.6\right),\max\left(1-x_3,0.4\right),\max\left(1-x_4,0.8\right)\right)=0.7,$$

$$\min\left(\left(1-x_1+0.2x_1\right),\left(1-x_2+0.6x_2\right),\left(1-x_3+0.4x_3\right),\left(1-x_4+0.8x_4\right)\right)=0.7,$$

$$\min\left(\min\left(1-x_1+0.2,1\right),\min\left(1-x_2+0.6,1\right),\min\left(1-x_3+0.4,1\right),\min\left(1-x_4+0.8,1\right)\right)=0.7.$$

Решения уравнения при различных видах импликаторов представлены в таблице 2.

Таблица 2 Сравнение решения уравнения

I	x^0	$\overline{x}^0$	$\underline{x}^0$
I_M	$\left[\begin{array}{c c c c} 0\le x_1^0<0.3 & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{c c c} 0\le x_2^0<0.3 & x_3^0=0.3 & 0\le x_4^0\le 1 \\ x_2^0=0.3 & 0\le x_3^0\le 0.3 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.} \\ x_1^0=0.3 & 0\le x_2^0\le 0.3 & 0\le x_3^0\le 0.3 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.$	$\left(0.3\;0.3\;0.3\;1\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$
I_P	$\left[\begin{array}{c c c c} 0\le x_1^0<3/8 & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{c c c} 0\le x_2^0<3/4 & x_3^0=1/2 & 0\le x_4^0\le 1 \\ x_2^0=3/4 & 0\le x_3^0\le 1/2 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.} \\ x_1^0=3/8 & 0\le x_2^0\le 3/4 & 0\le x_3^0\le 1/2 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.$	$\left(3/8\;3/4\;1/2\;1\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$
I_W	$\left[\begin{array}{c c c c} 0\le x_1^0<0.5 & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{c c c} 0\le x_2^0<0.9 & x_3^0=0.7 & 0\le x_4^0\le 1 \\ x_2^0=0.9 & 0\le x_3^0\le 0.7 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.} \\ x_1^0=0.5 & 0\le x_2^0\le 0.9 & 0\le x_3^0\le 0.7 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.$	$\left(0.5\;0.9\;0.7\;1\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$

5 Решение систем полиномиальных уравнений

Если $m,n>1$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

и уравнение (1) представляет собой систему полиномиальных уравнений:

$$\min_i\left(I\left(x_i,r_{ij}\right)\right)=y_j\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

Компоненты максимального решения системы определятся следующим образом:

$$\overline{x}^0=\left(\min_{\underline{j=1,n}}\left(\overline{x}_{ij}^0\right),\left(i=\overline{1,m}\right)\right).$$

6 Практическая реализация.

Исследуем известную нечеткую задачу диагностики [1]:

$$X\circ R=Y=\left(x_1 \vdots x_2 \vdots x_3 \vdots x_4\right)\circ\left(\begin{array}{c:c:c} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ \hdashline 0.6 & 0.1 & 1.0 \\ \hdashline 0.4 & 0.5 & 0.4 \\ \hdashline 0.8 & 0.0 & 1.0 \end{array}\right)=\left(0.7 \vdots 0.5 \vdots 0.7\right)$$

В таблице 3 представлены результаты решения второго и третьего уравнений $\left(j=2,3\right)$ и всей системы $\left(\{\vdots\right)$ для импликатора I_M.

Таблица. 3 Итоговая таблица с решениями системы

j	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
2	$0\le x_1^0\le 1\left[\begin{array}{c:c} 0\le x_2^0<0.5 & \left[\begin{array}{c:c} 0\le x_3^0<0.5 & x_4^0=0.5 \\ \hdashline 0.5\le x_3^0\le 1 & 0\le x_4^0\le 0.5 \end{array}\right. \\ \hdashline x_2^0=0.5 & \begin{array}{c:c} 0\le x_3^0\le 1 & 0\le x_4^0\le 0.5 \end{array} \end{array}\right.$	$\left(1 \vdots 0.5 \vdots 1 \vdots 0.5\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ \hdashline 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$
3	$\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0\le x_1^0<0.3 & 0\le x_2^0\le 1 & x_3^0=0.3 & 0\le x_4^0\le 1 \\ \hdashline x_1^0=0.3 & 0\le x_2^0\le 1 & 0\le x_3^0\le 0.3 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.$	$\left(0.3 \vdots 1 \vdots 0.3 \vdots 1\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ \hdashline 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$
$\{\vdots$	$\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0\le x_1^0<0.3 & 0\le x_2^0\le 0.3 & x_3^0=0.3 & x_4^0=0.5 \\ \hdashline x_1^0=0.3 & 0\le x_2^0\le 0.3 & 0\le x_3^0\le 0.3 & x_4^0=0.5 \end{array}\right.$	$\left(0.3 \vdots 0.3 \vdots 0.3 \vdots 0.5\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0.3 & 0.5 \\ \hdashline 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right.\right)$

Таблица 4 содержит решения уравнений, входящих в систему при использовании импликатора I_P.

Таблица 4 Решения уравнений при использовании импликатора I_P.

j	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
2	$0\le x_1^0\le 1\left[\begin{array}{c:c} 0\le x_2^0<3/8 & \left[\begin{array}{c:c} 0\le x_3^0<1 & x_4^0=1/2 \\ \hdashline x_3^0=1 & 0\le x_4^0\le 1/2 \end{array}\right. \\ \hdashline x_2^0=3/8 & \begin{array}{c:c} 0\le x_3^0\le 1 & 0\le x_4^0\le 1/2 \end{array} \end{array}\right.$	$\left(1 \vdots 3/8 \vdots 1 \vdots 1/2\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 3/8 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$
3	$\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0\le x_1^0<3/8 & 0\le x_2^0\le 1 & x_3^0=1/2 & 0\le x_4^0\le 1 \\ \hdashline x_1^0=3/8 & 0\le x_2^0\le 1 & 0\le x_3^0\le 1/2 & 0\le x_4^0\le 1 \end{array}\right.$	$\left(3/8 \vdots 1 \vdots 1/2 \vdots 1\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hdashline 3/8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$
$\{\vdots$	$\left[\begin{array}{c:c} 0\le x_1^0<3/8 & \left[\begin{array}{c:c:c} 0\le x_2^0<5/9 & x_3^0=1/2 & x_4^0=1/2 \\ \hdashline x_2^0=5/9 & x_3^0=1/2 & 0\le x_4^0\le 1/2 \end{array}\right. \\ \hdashline x_1^0=3/8 & \left[\begin{array}{c:c:c} 0\le x_2^0<5/9 & 0\le x_3^0\le 1/2 & x_4^0=1/2 \\ \hdashline x_2^0=5/9 & 0\le x_3^0\le 1/2 & 0\le x_4^0\le 1/2 \end{array}\right. \end{array}\right.$	$\left(3/8 \vdots 5/9 \vdots 1/2 \vdots 1/2\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \hdashline 0 & 5/9 & 1/2 & 0 \\ \hdashline 3/8 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hdashline 3/8 & 5/9 & 0 & 0 \end{array}\right.\right)$

Результаты решения уравнений при использовании *импликатора* I_W приведены в таблице 5.

Таблица. 5 Решения при использовании импликатора Лукачевича I_W

j	x^0	$\overline{x}^0$	$\underline{x}^0$
2	$0 \le x_1^0 \le 1 \left[\begin{array}{c:c} 0 \le x_2^0 < 0.6 & \left[\begin{array}{c:c} 0 \le x_3^0 < 1 & x_4^0 = 0.5 \\ \hdashline x_3^0 = 1 & 0 \le x_4^0 \le 0.5 \end{array}\right. \\ \hdashline x_2^0 = 0.6 & \begin{array}{c:c} 0 \le x_3^0 \le 1 & 0 \le x_4^0 \le 0.5 \end{array} \end{array}\right.$	$\left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0.6 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0.6 & 0 & 0 \end{array}\right)\right.$
3	$\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 \le x_1^0 < 0.5 & 0 \le x_2^0 \le 1 & x_3^0 = 0.7 & 0 \le x_4^0 \le 1 \\ \hdashline x_1^0 = 0.5 & 0 \le x_2^0 \le 1 & 0 \le x_3^0 \le 0.7 & 0 \le x_4^0 \le 1 \end{array}\right.$	$\left(\begin{array}{c:c:c:c} 0.5 & 1 & 0.7 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ \hdashline 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right.$
$\{\vdots$	$\left[\begin{array}{c:c} 0 \le x_1^0 < 0.5 & \left[\begin{array}{c:c:c} 0 \le x_2^0 < 0.6 & x_3^0 = 0.7 & x_4^0 = 0.5 \\ \hdashline x_2^0 = 0.6 & x_3^0 = 0.7 & 0 \le x_4^0 \le 0.5 \end{array}\right. \\ \hdashline x_1^0 = 0.5 & \left[\begin{array}{c:c:c} 0 \le x_2^0 < 0.6 & 0 \le x_3^0 \le 0.7 & x_4^0 = 0.5 \\ \hdashline x_2^0 = 0.6 & 0 \le x_3^0 \le 0.7 & 0 \le x_4^0 \le 0.5 \end{array}\right. \end{array}\right.$	$\left(\begin{array}{c:c:c:c} 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{array}\right)$	$\left(\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0.7 & 0.5 \\ \hdashline 0 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ \hdashline 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ \hdashline 0.5 & 0.6 & 0 & 0 \end{array}\right)\right.$

Выводы

Выполнено исследование влияния вида нечеткой импликации на решения обратной задач диагностики при нечетких исходных данных.

Предложенное методологическое обеспечение решения проблемы служит основой для разработок нечетких диагностических систем, позволяющих вырабатывать экспертные заключения о функционировании трудноформализуемых систем с элементами искусственного интеллекта.

Библиографический список

1. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111с.
2. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург. 2005. 736 с.
3. Осипов Г.С., Вашакидзе Н.С., Филиппова Г.В. О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде Wolfram Mathematica // Постулат. 2018. № 1. С. 42.
4. Осипов Г.С. Использование функции логического произведения в обратной задаче для нечетких реляционных уравнений // Материалы сборника научных трудов XXXI международной научно-практической конференции «MODERNSCIENCE: THEORETICAL AND PRACTICAL LOOK». М.: Олимп, 29 января 2018. С. 18-22. URL: http://olimpiks.ru/d/1340546/d/mst-31.pdf.
5. Осипов Г.С. Исследование влияния функций пересечения множеств в задаче нечеткой диагностики // Научные тенденции: Вопросы точных и технических наук. Сборник научных трудов по материалам XIII международной научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 12 февраля 2018 г. Изд. ЦНК МНИФ «Общественная наука», 2018. С. 14-19. DOI: 10.18411/spc-12-02-2018-06